

**CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA
CELSO SUCKOW DA FONSECA – CEFET/RJ**

**ANÁLISE DO COMPORTAMENTO
DINÂMICO DE DOIS VAGÕES ACOPLADOS
PASSANDO SOBRE UMA PONTE**

Maurício de Souza Maciel

Prof. Orientador:
Fernando Ribeiro da Silva

**Rio de Janeiro
Novembro de 2019**

**CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA
CELSO SUCKOW DA FONSECA – CEFET/RJ**

**ANÁLISE DO COMPORTAMENTO
DINÂMICO DE DOIS VAGÕES ACOPLADOS
PASSANDO SOBRE UMA PONTE**

Maurício de Souza Maciel

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel em engenharia mecânica, do Departamento de Engenharia Mecânica, do Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca.

Prof. Orientador:
Fernando Ribeiro da Silva

**Rio de Janeiro
Novembro de 2019**

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central do CEFET/RJ

M152 Maciel, Maurício de Souza.

Análise do comportamento dinâmico de dois vagões acoplados passando sobre uma ponte / Maurício de Souza Maciel – 2019.
xii, 42f. + apêndices : il. color., grafs., tabs. ; enc.

Projeto Final (Graduação). Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, 2019.

Bibliografia: f. 41-42.

Orientador: Fernando Ribeiro da Silva.

1. Engenharia mecânica. 2. Pontes – Cálculo. 3. Vibração. I. Silva, Fernando Ribeiro da (Orient.). II. Título.

CDD 621

Elaborada pelo bibliotecário Leandro Mota de Menezes CRB-7/5281

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela realização e conclusão deste presente trabalho.

Agradeço aos meus pais e meu irmão, pelo incentivo, apoio e suporte recebidos durante toda a graduação, bem como durante o período de realização deste trabalho.

Agradeço ao professor Fernando Ribeiro da Silva, pela orientação recebida durante o projeto. Sem sua contribuição, este projeto não existiria.

Agradeço aos professores que me lecionaram durante o período de graduação, com quem aprendi não só as matérias em classe, mas também aprendi a ser profissional.

RESUMO

MACIEL, Maurício de Souza. **Título do trabalho:** Análise do comportamento dinâmico de dois vagões acoplados passando sobre uma ponte. 2019. 42 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca. Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2019.

O objetivo deste projeto é analisar o comportamento dinâmico de um modelo de ponte quando submetido à passagem de dois vagões acoplados, e as respostas dessa interação no veículo em questão, afim de verificar os deslocamentos e as reações obtidas na estrutura do veículo modelado. A metodologia para a resolução do problema proposto foi puramente numérica, sendo feitas simulações com o auxílio do software compilador *MatLab*. Rotinas foram criadas para a implementação dos algoritmos desenvolvidos no corpo do trabalho. Por fim, foram feitas análises quanto aos resultados obtidos, disponibilizados em gráficos.

PALAVRAS-CHAVE: Acoplamento de vagões, vagões, vibrações em pontes.

ABSTRACT

MACIEL, Maurício de Souza. **Dynamic behavior analysis of two coupled wagons passing over a bridge**. 2019. 42 f. Trabalho de Conclusão de Curso - Federal Center of Technological Education – Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2019.

The objective of this project is to analyze the dynamic behaviour of a bridge model when submitted to the passage of two coupled wagons, and the responses to this interaction in the vehicle in question, in order to verify the displacements and the reactions obtained in the structure of the modeled vehicle. The methodology for solving the proposed problem was purely numerical, and simulations were made with the aid of the *MatLab* compiler software. Routines were created for the implementation of algorithms developed in the body of work. Finally, analyzes were made regarding the results obtained, made available in graphs.

Keywords: Vibration in bridges, wagons, wagon-coupling.

SUMÁRIO

| | |
|---|----|
| Introdução | 1 |
| 1.1 Motivação | 2 |
| 1.2 Justificativa | 2 |
| 1.3 Objetivos | 3 |
| 1.4 Metodologia e trabalho realizado..... | 3 |
| 1.5 Organização do trabalho | 4 |
| Referencial Teórico | 5 |
| 2.1 Vibrações mecânicas..... | 5 |
| 2.2 Graus de liberdade de um sistema | 7 |
| 2.3 Movimento de base | 7 |
| 2.4 Pontes..... | 8 |
| Modelagem numérica do sistema | 9 |
| 3.1 Modelo de vagão único..... | 9 |
| 3.1.1 Teste do modelo | 16 |
| 3.2 Acoplamento de dois vagões | 19 |
| 3.3 Modelo de ponte | 25 |
| Acoplamento de modelos de vagão e ponte | 31 |
| 4.1 Vagão único passando pela ponte..... | 31 |
| 4.2 Dois vagões acoplados passando pela ponte..... | 33 |
| Conclusões..... | 38 |
| Referências Bibliográficas | 40 |
| Apêndice I: Rotina para a solução do modelo de vagão único passando por uma lombada | 42 |
| Apêndice II: Rotina para a solução dos vagões acoplados passando pela lombada | 45 |
| Apêndice III: Rotina para a solução do modelo de vagão único passando pela ponte | 51 |

Lista de Figuras

| | |
|---|----|
| Figura 1: Principais elementos constitutivos de um sistema vibratório. | 5 |
| Figura 2: Exemplo de um sistema massa-mola simples apresentando movimento de base. | 7 |
| Figura 3: Modelo de vagão. | 10 |
| Figura 4: Diagrama de corpo-livre do vagão. | 11 |
| Figura 5: Diagrama de corpo-livre do truck traseiro. | 12 |
| Figura 6: Diagrama de corpo-livre do truck dianteiro. | 14 |
| Figura 7: Deslocamento do truck dianteiro do vagão ao passar por uma lombada. | 17 |
| Figura 8: Deslocamento do truck traseiro do vagão ao passar por uma lombada. | 18 |
| Figura 9: Deslocamento do centro de massa do vagão ao passar por uma lombada. | 18 |
| Figura 10: Modelo com vagões acoplados. | 20 |
| Figura 11: Diagrama de corpo-livre do vagão dianteiro, para o sistema de vagões acoplados. | 20 |
| Figura 12: Diagrama de corpo-livre do vagão traseiro, para o sistema de vagões acoplados. | 20 |
| Figura 13: Deformação da mola no ponto de acoplamento entre os vagões. | 23 |
| Figura 14: Força de reação no ponto de acoplamento. | 23 |
| Figura 15: Deslocamento do centro de massa do vagão dianteiro. | 24 |
| Figura 16: Deslocamento do centro de massa do vagão traseiro. | 25 |
| Figura 17: Representação do modelo de ponte e seus graus de liberdade. Adaptado de SILVA e OLIVEIRA (2015) | 25 |
| Figura 18: Modelo de elemento para a viga. | 26 |
| Figura 19: Decomposição da força nos nós do elemento de viga. | 29 |
| Figura 20: Deslocamento do centro de massa do vagão ao passar pela ponte. | 32 |
| Figura 21: Deslocamento do nó central da ponte quando submetida à passagem de um único vagão. | 32 |
| Figura 22: Deslocamento do centro de massa do vagão dianteiro. | 34 |
| Figura 23: Deslocamento do centro de massa do vagão traseiro. | 35 |
| Figura 24: Deformação na mola no ponto de acoplamento. | 35 |
| Figura 25: Força de reação na mola no ponto de acoplamento. | 36 |
| Figura 26: Deslocamento do nó central da ponte. | 36 |
| Figura 27: Força em módulo na mola traseira da suspensão secundária do vagão traseiro. | 37 |

Lista de Tabelas

| | |
|--|----|
| Tabela 1: Variáveis referentes às equações utilizadas para descrever o movimento dos corpos..... | 6 |
| Tabela 2: Parâmetros geométricos referentes ao modelo de vagão. Adaptado de OLIVEIRA (2016)..... | 10 |
| Tabela 3: Parâmetros geométricos referentes ao modelo de vagão. Adaptado de OLIVEIRA (2016)..... | 11 |
| Tabela 4: Propriedades referentes ao modelo de ponte. | 26 |

Lista de Abreviaturas e Siglas

CONTRAN Conselho Nacional de Trânsito

DCL Diagrama de corpo-livre

Lista de Símbolos

| | |
|-----------|---|
| A | Área da seção transversal |
| b_p | Constante de amortecimento da suspensão primária |
| b_s | Constante de amortecimento da suspensão secundária |
| B | Matriz B do vagão |
| B_p | Matriz B da ponte |
| E | Módulo de Elasticidade |
| F_{kp1} | Força na mola traseira da suspensão principal do <i>truck</i> traseiro |
| F_{kp2} | Força na mola dianteira da suspensão principal do <i>truck</i> traseiro |
| F_{kp3} | Força na mola traseira da suspensão principal do <i>truck</i> dianteiro |
| F_{kp4} | Força na mola dianteira da suspensão principal do <i>truck</i> dianteiro |
| F_{bp1} | Força no amortecedor traseiro da suspensão principal do <i>truck</i> traseiro |
| F_{bp2} | Força no amortecedor dianteiro da suspensão principal do <i>truck</i> traseiro |
| F_{bp3} | Força no amortecedor traseiro da suspensão principal do <i>truck</i> dianteiro |
| F_{bp4} | Força no amortecedor dianteiro da suspensão principal do <i>truck</i> dianteiro |
| F_{ks1} | Força na mola traseira da suspensão secundária |
| F_{ks2} | Força na mola dianteira da suspensão secundária |
| F_{bs1} | Força no amortecedor traseiro da suspensão secundária |
| F_{bs2} | Força no amortecedor dianteiro da suspensão secundária |
| g | Aceleração da gravidade |
| I | Momento de inércia de massa do corpo |
| I_v | Momento de inércia do vagão |
| I_{td} | Momento de inércia do <i>truck</i> dianteiro |
| I_{tt} | Momento de inércia do <i>truck</i> traseiro |
| K_{acp} | Constante de mola fictícia arbitrada para o acoplamento |
| K | Matriz K do vagão |
| K_p | Matriz K da ponte |
| k_p | Constante de mola da suspensão primária |
| k_s | Constante de mola da suspensão secundária |
| L | Comprimento do elemento de viga |

| | |
|-----------------|--|
| L_p | Comprimento total da ponte |
| m_{ij} | Elemento genérico da matriz M referente à ponte |
| m | Massa do corpo |
| M | Matriz M do vagão |
| M_p | Matriz M da ponte |
| N_1 | Termo componente da função de forma |
| N_2 | Termo componente da função de forma |
| N_3 | Termo componente da função de forma |
| N_4 | Termo componente da função de forma |
| x_e | Distância entre os braços de suspensão traseiro e dianteiro do veículo dianteiro e traseiro, respectivamente, e o ponto de acoplamento |
| y_{p1} | Posição do pneu 1 no eixo z |
| \dot{y}_{p1} | Velocidade do pneu 1 no eixo z |
| y_{p2} | Posição do pneu 2 no eixo z |
| \dot{y}_{p2} | Velocidade do pneu 2 no eixo z |
| y_{p3} | Posição do pneu 3 no eixo z |
| \dot{y}_{p3} | Velocidade do pneu 3 no eixo z |
| y_{p4} | Posição do pneu 4 no eixo z |
| \dot{y}_{p4} | Velocidade do pneu 4 no eixo z |
| α | Aceleração linear resultante |
| $\ddot{\theta}$ | Aceleração angular resultante |
| ρ | Massa específica |
| ψ_l | Função dependente do tempo, que compõe a função de forma |
| ψ_j | Função dependente do espaço, que compõe a função de form |

Capítulo 1

Introdução

O advento da ciência moderna possibilitou ao homem novas soluções frente aos grandes problemas enfrentados em tempos antigos. A logística de transporte de pessoas e cargas era muito limitada, uma vez que era dispendiosa em termos de tempo e energia. Em muitos casos, nos veículos terrestres a força utilizada era de tração animal. E esta conjuntura tornava escasso o leque de opções disponíveis para o transporte: tudo levava bastante tempo. E nos locais onde não era possível utilizar a tração animal, fazia-se necessário o emprego de força manual para movimentação da carga e de passageiros.

A invenção dos motores a vapor no século XIX possibilitou o desenvolvimento de novas formas de transporte. Com o crescente volume de mercadorias produzidas durante a primeira revolução industrial, inovações se faziam necessárias para carregar grandes volumes de carga. O uso de matéria-prima aumentava a medida que as metas de produção cresciam, portanto era preciso transportar toneladas de material para as fábricas. Posteriormente, depois do processo de manufatura, os produtos precisavam chegar aos seus respectivos destinos. No âmbito dos transportes terrestres, a principal e economicamente mais viável forma de movimentar grandes volumes de cargas e/ou passageiros é através de ferrovias.

No ano de 1804, a primeira locomotiva movida a vapor foi desenvolvida pelo engenheiro britânico Richard Trevitick. Transportando mais de 10 toneladas de ferro e uma tripulação de 70 homens, a composição com um vagão trator e cinco outros vagões extras percorreu 9 milhas em aproximadamente duas horas, entre uma siderúrgica localizada em Merthyr Tydfil, no País de Gales, até Abercynnon Valley.

Novas tecnologias foram desenvolvidas nas posteriores revoluções tecnológicas. Passando por motores a combustão interna utilizando óleo combustível até as mais modernas formas de garantir a propulsão dos veículos, como os trens de levitação magnética, também conhecidos como “trens-bala”, as ferrovias mostram-se uma efetiva forma de transporte no tangente a custo-benefício. Países como Alemanha e Japão são líderes na pesquisa e desenvolvimento de tais tecnologias.

Independente da forma de tecnologia empregada na propulsão dos veículos, as ferrovias têm como objetivo principal ligar dois destinos, um de partida e um de chegada. O emprego de pontes é uma das principais alternativas quanto é necessário fazer a ligação entre dois pontos quaisquer do trajeto que tenham entre si um obstáculo natural ou artificial. Por exemplo, pontes

são empregadas quando se objetiva fazer a conexão entre dois pontos separados por um curso de água, quando se deseja superar trajetos acidentados e irregulares, trajetos montanhosos, fazer retornos ou mesmo quando é necessário construir um viaduto sobre o próprio percurso, dentre outras formas de utilização deste artifício da engenharia. O foco de estudo deste trabalho de conclusão de curso é analisar dinamicamente a interação de dois vagões acoplados passando por uma ponte.

1.1 Motivação

A circulação do fluxo de matéria-prima, produtos e pessoas ainda é um problema enfrentado atualmente no Brasil. Depois de vultuosos investimentos em governos anteriores na malha rodoviária do país, principalmente entre as décadas de 1960 e 1970, agora o país se vê na situação de superar esse limitante fator logístico. O chamado “custo Brasil” tem como uma de suas causas justamente este fator: o aumento tempo de entrega, bem como aumento do custo operacional dos bens e serviços, por conta de problemas de conservação da malha rodoviária, que é a principal forma de escoamento de materiais, produtos e pessoas dentro do território nacional.

Com vistas a solucionar esses problemas, os governos anteriores e o atual governo vêm investindo na construção de novas ferrovias, bem como trabalha para realizar a concessão de trechos já existentes.

Desta maneira, é necessário que o país possua capacidade técnica disponível para planejar, projetar e garantir em funcionamento sua malha ferroviária.

A motivação deste trabalho é compreender as interações ocorrentes dinâmicas que ocorrem no sistema “vagões-ponte”, e consolidar uma base teórica já existente de conhecimento que poderá ser aplicada em estudos posteriores de sistemas mais sofisticados.

1.2 Justificativa

Tão importante quanto garantir um escoamento eficiente e eficaz de matéria, produtos e pessoas, é garantir que tudo isso ocorra em segurança. É necessário compreender os fenômenos físicos envolvidos no transporte de carga e passageiros e prever possíveis situações. Este estudo visa compreender o que acontece durante a passagem de vagões sobre uma ponte, e como a interação dinâmica entre a ponte e as cargas envolvidas no sistema afeta a composição,

uma vez que a segurança da tripulação e dos demais passageiros é de fundamental importância. Além disso, é preciso compreender como o veículo se comporta durante o experimento simulado numericamente e qual é a influência do comportamento da ponte sobre o veículo.

Para uma compreensão geral que poderá ser aplicada em outros sistemas próximos à realidade, ou mesmo em sistemas mais complexos, serão utilizados modelos fictícios de veículo e de ponte, que serão referenciados e descritos nos capítulos posteriores.

Serão utilizados modelos de meio veículo, com seis graus de liberdade cada um. A ponte foi modelada com 12 graus de liberdade.

1.3 Objetivos

Os principais objetivos deste trabalho são:

- Analisar as condições de rodagem de um único vagão trator passando por um obstáculo (quebra-molas), para checagem e verificação do modelo proposto.
- A partir da validação do modelo de vagão único, modelar um novo sistema de veículo, composto por vagão trator acoplado a outro vagão rebocado, sendo checado e verificado também através de passagem pelo mesmo obstáculo já citado.
- Por fim, simular numericamente a passagem do sistema mais complexo sugerido, composto de dois vagões acoplados passando sobre a estrutura da ponte. A partir de tal simulação, será possível descrever o comportamento de características importantes de todo o conjunto, como o deslocamento de centro de massa dos *trucks* e dos vagões, valores de acelerações lineares e angulares desenvolvidas, por conseguinte, as forças atuantes no sistema em qualquer ponto da simulação, dentre outros quesitos passíveis de análise.

1.4 Metodologia e trabalho realizado

O trabalho realizado foi realizado através de uma abordagem metodológica feita de forma numérica – isto é, os sistemas propostos são descritos fisicamente, sendo posteriormente equacionados e organizados em algoritmos, afim de, depois de compilar tais algoritmos em software próprio para isto, afim de obter os resultados referentes equacionamento de forma

puramente simulada. O trabalho realizado foi realizado ao longo das disciplinas de “Projeto Final 1” e “Projeto Final 2”, do Departamento de Engenharia Mecânica do CEFET/RJ.

1.5 Organização do trabalho

O trabalho divide-se em cinco capítulos principais, seguidos pelas referências bibliográficas utilizadas como fonte de pesquisa, e por uma seção de apêndices, onde se encontra a implementação numérica em software compilador, *MatLab*, da modelagem feita referente às diferentes configurações de sistema propostas durante o projeto.

No capítulo de introdução, é destacada a importância do trabalho como um estudo simplificado de um complexo sistema, para a formação de um conhecimento que doravante será necessário para a compreensão de sistemas mais sofisticados. É digno de nota que, apesar das simplificações sugeridas nos sistemas propostos, e até mesmo o fato de estar limitado pela capacidade de processamento do software compilador, este projeto tem como foco de estudo um sistema complexo de vibrações mecânicas, com um ou mais veículos com duas suspensões – uma inferior, representada pelos *trucks* dianteiro e traseiro, respectivamente, e uma suspensão superior, entre os *trucks* e a estrutura do vagão.

No capítulo 2 se encontra o referencial teórico necessário para a compreensão do desenvolvimento numérico proposto.

No capítulo 3 se pode ver a caracterização dos modelos vagão simples/vagão trator com outro vagão acoplado, além da caracterização numérica do obstáculo a ser superado. Ainda neste capítulo, encontra-se também a modelagem da ponte.

No capítulo 4 se encontram os equacionamentos necessários para compilação dos modelos de vagão simples/vagões acoplados passando pela ponte, bem como os gráficos referentes aos resultados obtidos na compilação dos algoritmos propostos para cada modelo sugerido. Tais algoritmos podem ser encontrados nos anexos deste trabalho.

O último capítulo principal deste trabalho é o capítulo 5, que é compreendido pelas considerações finais feitas de acordo com a análise dos resultados obtidos nos capítulos anteriores.

Capítulo 2

Referencial Teórico

O objetivo deste capítulo é fomentar uma bagagem teórica necessária para a compreensão dos fenômenos físicos de vibrações envolvidos na proposta do presente estudo. Serão abordados os temas de vibrações mecânicas, graus de liberdade de um sistema, excitação de base, e uma breve seção sobre o estudo de pontes.

2.1 Vibrações mecânicas

Todo movimento que se repete após um determinado intervalo de tempo conhecido em torno de um ponto de referência é denominado vibração ou oscilação. A quantidade de vezes que as oscilações ocorrem dentro deste intervalo é denominada frequência, e sua unidade padrão é Hertz (Hz). De forma genérica, as vibrações mecânicas estão associadas a três principais elementos constitutivos, destacados na Figura 1:

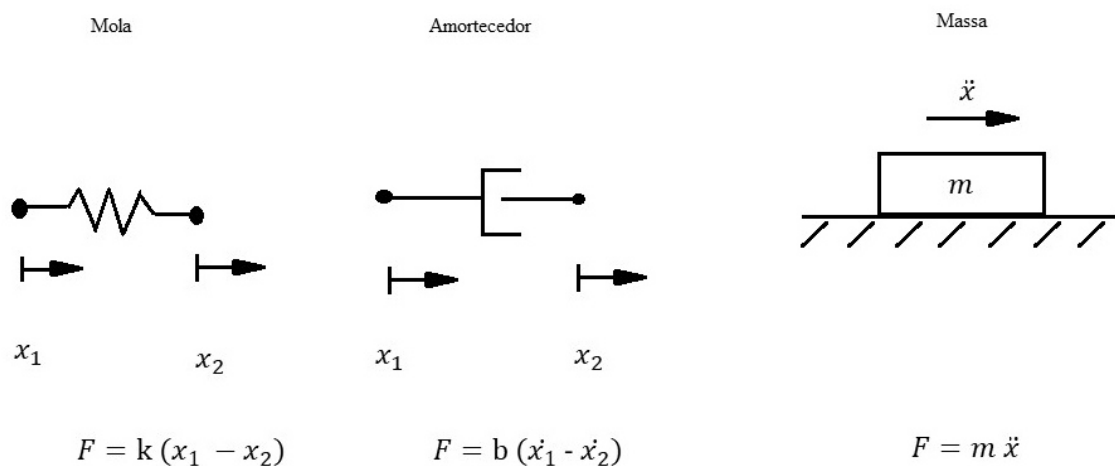


Figura 1: Principais elementos constitutivos de um sistema vibratório.

- Elemento de massa, ou inércia, constituindo um meio de armazenamento de energia;
- Elemento para armazenamento de energia cinética, geralmente representado por uma mola elástica;

- Elemento para representar perda gradual de energia no sistema, usualmente simbolizado como amortecedor.

A vibração de um determinado sistema está diretamente ligada ao processo alternado de transformação potencial armazenada em energia cinética, e vice-versa. Os sistemas amortecidos apresentam uma queda gradual na quantidade de energia armazenada, sendo necessária uma força externa para que se mantenha em regime vibratório permanente.

Existem duas formas de vibração: as vibrações livres e as vibrações forçadas. As vibrações livres acontecem quando determinado sistema mecânico é abandonado em uma posição aleatória e deixado para vibrar livremente. É mantido em movimento unicamente pelas forças restauradoras internas do sistema, sem a ação de forças externas. Por outro lado, as vibrações forçadas ocorrem quando existe alguma influência externa no sistema no domínio do tempo. Pode ser, dentre outras formas, a aplicação de uma força ou de um momento aplicado em um ponto específico do sistema mecânico.

Para a descrever o comportamento do sistema, e, por conseguinte, a posição de qualquer elemento do sistema dentro do domínio do tempo, é utilizada a equação referente a segunda Lei de Newton. É utilizada também a equação para o somatório de momentos lineares aplicados sobre o corpo em estudo. Ambas as equações estão descritas nas Equações 2.1 e 2.2, respectivamente:

$$\sum F = m\alpha \quad (2.1)$$

$$\sum Mo = I\ddot{\theta} \quad (2.2)$$

São feitos os desenhos de corpo-livre (DCLs) de cada elemento inercial do sistema, e as equações acima são utilizadas de acordo com os graus de liberdade que o sistema apresenta. As variáveis descritas acima representam:

| | |
|-----------------|--|
| $\sum F$ | Somatório de forças atuantes sobre o corpo |
| m | Massa do corpo |
| α | Aceleração linear resultante |
| $\sum Mo$ | Somatório dos momentos aplicados sobre o corpo |
| I | Momento de inércia de massa do corpo |
| $\ddot{\theta}$ | Aceleração angular resultante |

Tabela 1: Variáveis referentes às equações utilizadas para descrever o movimento dos corpos

2.2 Graus de liberdade de um sistema

De acordo com RAO (2009), o número mínimo de coordenadas independentes requeridas para determinar completamente todas as posições de um sistema a qualquer instante define o grau de liberdade do sistema. Aplicando este conceito ao objeto de estudo deste trabalho, os graus de liberdade se apresentam na forma de deslocamentos ou de ângulo de rotação, ambos medidos em relação a um referencial fixo pré-estabelecido.

Deste modo, a quantidade total de deslocamentos e ângulos de rotação (ambos em relação a um referencial fixo) necessários para descrever o comportamento do sistema mecânico define a quantidade total de graus de liberdade. Os sistemas propostos neste trabalho possuem seis graus de liberdade para o vagão simples, sendo três deslocamentos e três ângulos; doze graus de liberdade para dois vagões acoplados, sendo três deslocamentos e três ângulos para cada vagão; doze graus de liberdade para a ponte, sendo seis deslocamentos e seis ângulos. A quantidade de graus de liberdade para o acoplamento de sistemas (vagão único e ponte, ou vagões acoplados e ponte) é representado pela soma direta dos graus de liberdade individuais de cada componente do sistema. Desta maneira, por exemplo, serão analisados vinte e quatro graus de liberdade para o sistema dois vagões/ponte.

2.3 Movimento de base

Um importante ponto para a compreensão dos sistemas mecânicos propostos neste trabalho é o movimento de base. Dentre os problemas envolvendo variáveis de entrada na forma de deslocamentos, os problemas envolvendo movimento de base se caracterizam por um movimento linear do corpo sobre uma superfície não constante. A superfície é caracterizada por uma função conhecida, $y(t)$.

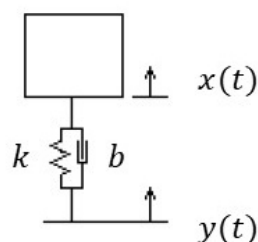


Figura 2: Exemplo de um sistema massa-mola simples apresentando movimento de base.

2.4 Pontes

O primeiro registro de estudos na área de pontes e viadutos submetidos a cargas móveis foi feito por WILLIS (1849), que deduziu a equação de movimento onde uma viga simplesmente apoiada, flexível e de massa desprezível era submetida à passagem de uma massa com velocidade constante.

Os modelos matemáticos atuais para o estudo envolvendo cargas móveis sendo deslocadas sobre pontes ou viadutos utilizam a técnica de elementos finitos, onde forças conhecidas, podendo ser constantes ou não, atravessam a estrutura do modelo da estrutura, que é caracterizada como n elementos sequenciais. A interação entre as cargas aplicadas e os elementos da estrutura são calculadas por meio de algoritmos, que calculam a posição de cada força sobre a estrutura durante o domínio do tempo, e desta maneira, é possível obter solução para os deslocamentos provocados pelas cargas sobre a estrutura, bem como a resposta das solicitações impostas pela estrutura sobre a própria carga móvel.

Capítulo 3

Modelagem numérica do sistema

Neste capítulo, os modelos físicos de veículos e estrutura serão descritos, além de serem caracterizados numericamente por meio da Equação 2.1 e Equação 2.2, respectivamente.

3.1 Modelo de vagão único

O modelo estudado possui seis graus de liberdade. Três destes graus são referentes aos deslocamentos dos *trucks* dianteiro e traseiro, respectivamente, bem como o deslocamento do centro de massa do vagão. Os outros três graus de liberdade são referentes aos deslocamentos angulares, isto é, os ângulos de rotação dos corpos em relação ao referencial no eixo horizontal.

O veículo é composto por duas suspensões, sendo denominadas suspensão primária e suspensão secundária. Para efeito de simplificação de modelo, a abordagem do problema proposto foi feita de modo a não incluir o efeito do contato entre as rodas e o solo, ou seja, as rodas são indeformáveis e não absorvem energia elasticamente, nem dissipam energia por amortecimento. Desta forma, o contato do veículo do veículo com o solo é representado diretamente através da suspensão principal, que é composta por uma mola de constante elástica k_p e um amortecedor, com constante de amortecimento b_p .

Os *trucks* estão posicionados logo acima da suspensão principal, tendo seus valores de massa m_t e momento de inércia de massa I_t . O veículo conta ainda com uma suspensão secundária entre o truck e o vagão, com constante elástica de mola k_s e constante de amortecimento b_s . Por fim, o vagão é descrito com seu valor de massa m_v e momento de inércia de massa I_v . Os valores de cada constante referente aos parâmetros físicos do vagão podem ser encontrados na tabela 2, adaptados de OLIVEIRA (2016) para o caso de meio veículo. A representação esquemática do vagão está descrita na Figura 3.

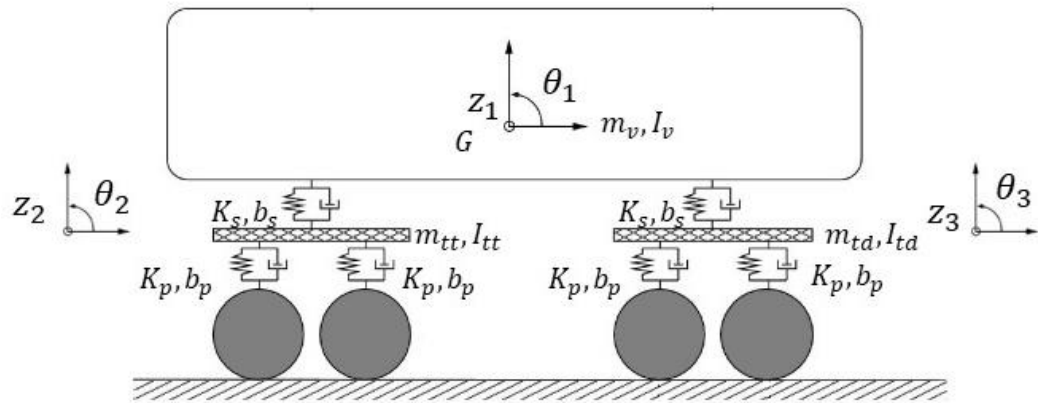


Figura 3: Modelo de vagão.

Onde:

z_1 = Deslocamento do centro de massa do vagão;

z_2 = Deslocamento do truck traseiro;

z_3 = Deslocamento do truck dianteiro;

θ_1 = Ângulo de rotação do centro de massa do vagão com relação ao plano horizontal;

θ_2 = Ângulo de rotação do *truck* traseiro com relação ao plano horizontal;

θ_3 = Ângulo de rotação do *truck* dianteiro com relação ao plano horizontal;

| Grandeza | Valor | Unidade |
|--|---------|-------------------|
| Massa do vagão (m_v) | 24560 | kg |
| Momento de inércia do vagão (I_v) | 1004475 | kg.m ² |
| Massa do <i>truck</i> dianteiro (m_{td}) | 5500 | kg |
| Massa do <i>truck</i> traseiro (m_{tt}) | 5500 | kg |
| Momento de inércia do <i>truck</i> dianteiro (I_{td}) | 10400 | kg.m ² |
| Momento de inércia do <i>truck</i> traseiro (I_{tt}) | 10400 | kg.m ² |
| Constante de mola da suspensão primária (k_p) | 1637275 | N/m |
| Constante de mola da suspensão secundária (k_s) | 875665 | N/m |
| Constante de amortecimento da suspensão primária (b_p) | 32745,5 | (N.s)/m |
| Constante de amortecimento da suspensão secundária (b_s) | 17513,1 | (N.s)/m |

Tabela 2: Parâmetros geométricos referentes ao modelo de vagão. Adaptado de OLIVEIRA (2016).

Os parâmetros geométricos referentes aos vagões estão listados abaixo na Tabela 3.

| Grandeza | Valor | Unidade |
|--|-------|---------|
| Comprimento entre-eixos do vagão (2d) | 15 | m |
| Distância entre o centro das rodas de cada <i>truck</i> (2a) | 3 | m |

Tabela 3: Parâmetros geométricos referentes ao modelo de vagão. Adaptado de OLIVEIRA (2016).

O método convencionado neste trabalho para equacionamento do modelo de vagão foi:

- Molas e amortecedores das suspensões sob efeito de tração;
- Deslocamentos positivos para cima no eixo Z;
- Momentos lineares positivos no sentido anti-horário.

Desta maneira, o diagrama de corpo-livre para o vagão, está representado na Figura 4.

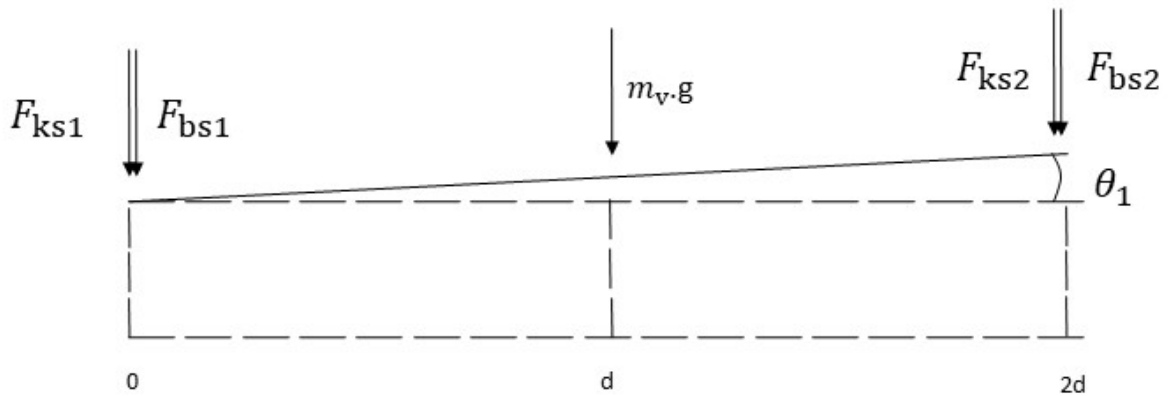


Figura 4: Diagrama de corpo-livre do vagão.

As forças representadas na Figura 4 estão descritas nas equações abaixo:

$$F_{ks1} = k_s(z_1 - d\theta_1 - z_2) \quad (3.1)$$

$$F_{bs1} = b_s(\dot{z}_1 - d\dot{\theta}_1 - \dot{z}_2) \quad (3.2)$$

$$F_{ks2} = k_s(z_1 + d\theta_1 - z_3) \quad (3.3)$$

$$F_{bs2} = b_s(\dot{z}_1 + d\dot{\theta}_1 - \dot{z}_3) \quad (3.4)$$

Onde:

F_{ks1} = Força na mola traseira da suspensão secundária;

F_{ks2} = Força na mola dianteira da suspensão secundária;

F_{bs1} = Força no amortecedor traseiro da suspensão secundária;

F_{bs2} =Força no amortecedor dianteiro da suspensão secundária;

Segue na Equação 3.5 a aplicação da segunda lei de Newton para as forças indicadas no DCL do vagão:

$$\begin{aligned} \Sigma F_y &= m\ddot{z}_1 \quad (\uparrow +) \\ m\ddot{z}_1 + \dot{z}_1(2b_s) + \dot{z}_2(-b_s) + \dot{z}_3(-b_s) + z_1(2k_s) + z_2(-k_s) + z_3(-k_s) + \\ &\theta_1(-2k_s d) = -m_v g \end{aligned} \quad (3.5)$$

Aplicando a Equação 2.2 para o DCL do vagão, obtém-se na Equação 3.6 o somatório de momentos aplicados sobre o vagão:

$$\begin{aligned} \Sigma M_d &= I_v \ddot{\theta}_1 \\ I_v \ddot{\theta}_1 + \dot{z}_2(b_s d) + \dot{z}_3(-b_s d) + \dot{\theta}_1(2b_s d^2) + z_2(k_s d) + z_3(-k_s d) + \\ &\theta_1(2k_s d^2) = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

O diagrama de corpo-livre do *truck* traseiro está representado a seguir, na Figura 5.

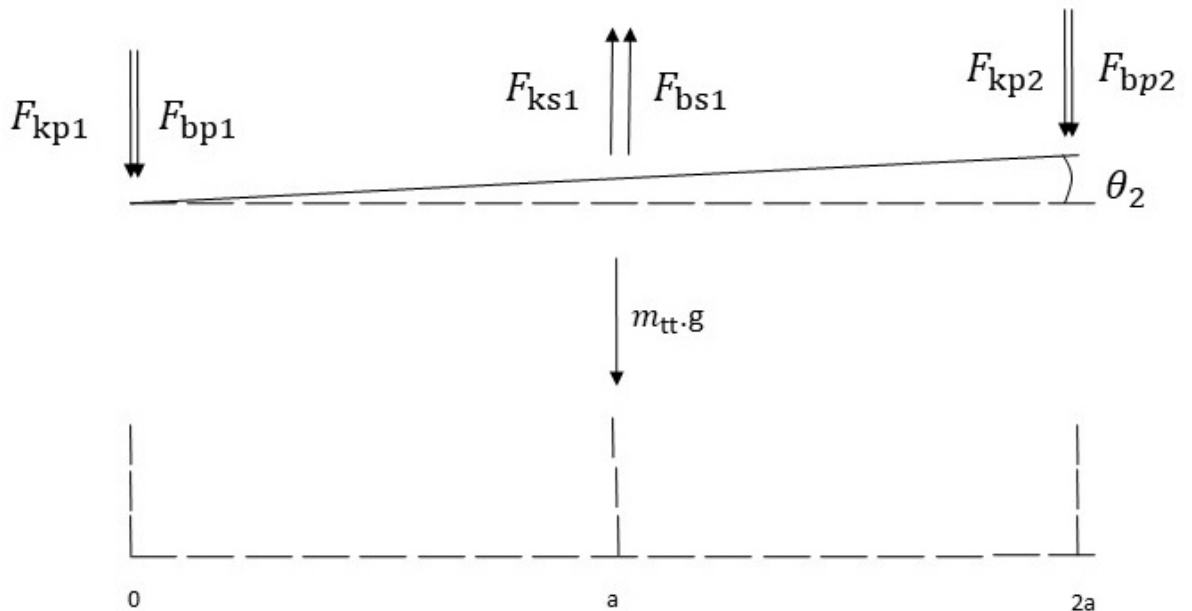


Figura 5: Diagrama de corpo-livre do *truck* traseiro.

As forças F_{ks1} e F_{bs1} estão representadas na Equação 3.1 e 3.2, respectivamente. As demais forças estão representadas na Figura 5 e são descritas nas equações abaixo:

$$F_{kp1} = k_p(z_2 - a\theta_2 - y_{p1}) \quad (3.7)$$

$$F_{bp1} = b_p(\dot{z}_2 - a\dot{\theta}_2 - \dot{y}_{p1}) \quad (3.8)$$

$$F_{kp2} = k_s(z_2 + a\theta_2 - y_{p2}) \quad (3.9)$$

$$F_{bp2} = b_s(\dot{z}_2 + a\dot{\theta}_2 - \dot{y}_{p2}) \quad (3.10)$$

Onde:

F_{kp1} =Força na mola traseira da suspensão primária traseira;

F_{kp2} =Força na mola dianteira da suspensão primária traseira;

F_{bp1} =Força no amortecedor traseiro da suspensão primária traseira;

F_{bp2} =Força no amortecedor dianteiro da suspensão primária traseira;

Semelhantemente ao vagão, aplicando a equação referente a segunda lei de Newton, obtém-se, na Equação 3.11:

$$\begin{aligned} \Sigma F_y &= m\ddot{z}_2 (\uparrow +) \\ m\ddot{z}_2 + \dot{z}_1(-b_s) + \dot{z}_2(2b_p + b_s) + \dot{\theta}_1(b_s d) + z_1(-k_s) + z_2(2k_p + k_s) + \\ \theta_1(k_s d) &= -m_{tt}g + k_p y_{p1} + k_p y_{p2} + b_p \dot{y}_{p1} + \dot{y}_{p2} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Aplicando a Equação 2.2 para o DCL do *truck* traseiro, obtém-se na Equação 3.12 o somatório de momentos aplicados sobre o vagão:

$$\begin{aligned} \Sigma M_d &= I_v \ddot{\theta}_2 \\ I_v \ddot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2(2b_p a^2) + \theta_2(2k_p a^2) &= -k_p y_{p1} a + k_p y_{p2} a - \\ & b_p \dot{y}_{p1} a + b_p \dot{y}_{p2} a \end{aligned} \quad (3.12)$$

O diagrama de corpo-livre do *truck* traseiro está representado a seguir, na Figura 5.

O diagrama de corpo-livre do *truck* dianteiro está representado a seguir, na Figura 6.

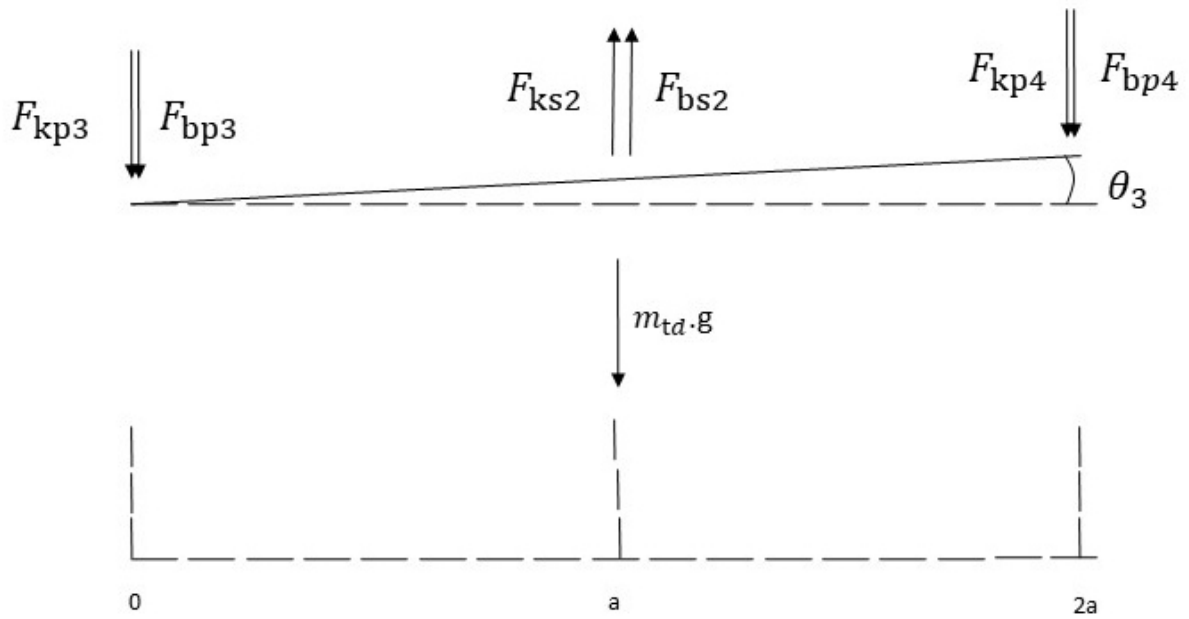


Figura 6: Diagrama de corpo-livre do *truck* dianteiro.

As forças F_{ks2} e F_{bs2} estão representadas na Equação 3.3 e 3.4, respectivamente. As demais forças representadas na Figura 6 estão descritas nas equações abaixo:

$$F_{kp3} = k_p(z_3 - a\theta_3 - y_{p3}) \quad (3.13)$$

$$F_{bp1} = b_p(\dot{z}_3 - a\dot{\theta}_3 - \dot{y}_{p3}) \quad (3.14)$$

$$F_{kp2} = k_s(z_3 + a\theta_3 - y_{p4}) \quad (3.15)$$

$$F_{bp2} = b_s(\dot{z}_3 + a\dot{\theta}_3 - \dot{y}_{p4}) \quad (3.16)$$

Onde:

F_{kp1} =Força na mola traseira da suspensão primária dianteira;

F_{kp2} =Força na mola dianteira da suspensão primária dianteira;

F_{bp1} =Força no amortecedor traseiro da suspensão primária dianteira;

F_{bp2} =Força no amortecedor dianteiro da suspensão primária dianteira;

Seguindo o mesmo procedimento de aplicação da segunda lei de Newton, segue a Equação 3.17:

$$\begin{aligned} \Sigma F_y &= m\ddot{z}_3 (\uparrow +) \\ m\ddot{z}_3 + \dot{z}_1(-b_s) + \dot{z}_3(2b_p + b_s) + \dot{\theta}_1(-b_s d) + z_1(-k_s) + z_2(2k_p + k_s) + \\ \theta_1(-k_s d) &= -m_{td}g + k_p y_{p3} + k_p y_{p3} + b_p \dot{y}_{p4} + \dot{y}_{p4} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Aplicando a Equação 2.2 para o DCL do *truck* dianteiro, obtém-se na Equação 3.18 o somatório de momentos aplicados sobre o vagão:

$$\begin{aligned} \Sigma M_d &= I_v \ddot{\theta}_3 \\ I_{td} \ddot{\theta}_3 + \dot{\theta}_3 (2b_p a^2) + \theta_3 (2k_p a^2) &= -k_p y_{p3} a + k_p y_{p3} a - \\ & b_p \dot{y}_{p4} a + b_p \dot{y}_{p4} a \end{aligned} \quad (3.18)$$

Com as equações descritas, é possível escrever matricialmente o sistema na forma mostrada abaixo, na Equação 3.19:

$$[M] \begin{bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \\ \ddot{z}_3 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} + [B] \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} + [K] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = F(t) \quad (3.19)$$

Onde:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_v & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{tt} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{td} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{tt} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{td} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 2b_s & -b_s & -b_s & 0 & 0 & 0 \\ -b_s & 2b_p + b_s & 0 & b_s d & 0 & 0 \\ -b_s & 0 & 2b_p + b_s & -b_s d & 0 & 0 \\ 0 & b_s d & -b_s d & 2b_s d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2b_p a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2b_p a^2 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 2k_s & -k_s & -k_s & 0 & 0 & 0 \\ -k_s & 2k_p + k_s & 0 & k_s d & 0 & 0 \\ -k_s & 0 & 2k_p + k_s & -k_s d & 0 & 0 \\ 0 & k_s d & -k_s d & 2k_s d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2k_p a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2k_p a^2 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$F(t) = \begin{bmatrix} -m_v g \\ -m_{tt}g + k_p y_{p1} + k_p y_{p2} + b_p \dot{y}_{p1} + \dot{y}_{p2} \\ -m_{td}g + k_p y_{p3} + k_p y_{p3} + b_p \dot{y}_{p4} + \dot{y}_{p4} \\ 0 \\ -k_p y_{p1}a + k_p y_{p2}a - b_p \dot{y}_{p1}a + b_p \dot{y}_{p2}a \\ -k_p y_{p3}a + k_p y_{p3}a - b_p \dot{y}_{p4}a + b_p \dot{y}_{p4}a \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

3.1.1 Teste do modelo

Esse modelo matemático será testado utilizando um obstáculo do tipo lombada. A resolução N° 39/98 do CONTRAN estabelece dois padrões possíveis de ondulação transversal (quebra-molas), dos quais foi escolhido o segundo modelo do tipo II para este trabalho. Portanto, apresenta altura de 0,1m e comprimento total de 3,70m. A função $y(t)$ que descreve a forma da lombada está mostrada abaixo na Equação 3.24:

$$y(t) = \frac{y_0}{2} (1 - \cos \omega t) \quad (3.24)$$

Onde:

y_0 = Altura máxima da lombada;

ω = Frequência de excitação associada à velocidade do veículo, sendo seu cálculo mostrado na Equação 3.25.

$$\omega = \frac{2\pi d}{v} \quad (3.25)$$

d = Comprimento da lombada;

v = Velocidade do veículo.

Para efetuar a implementação destas equações no *MatLab*, afim de obter a solução com os deslocamentos e ângulos de rotações dos corpos, é feita a seguinte manipulação matemática:

$$\begin{aligned} [\dot{X}] &= [V] \\ [M][\dot{V}] + [B][V] + [K][X] &= [F_{(t)}] \\ [\dot{V}] &= -[M]^{-1}[B][V] - [M]^{-1}[K][X] + [M]^{-1}[F_{(t)}] \end{aligned}$$

Gerando a matriz:

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -M^{-1}K & -M^{-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ V \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] \\ M^{-1} \end{bmatrix} F(t) \quad (3.26)$$

Sendo:

[0]: Matriz 6x6 composta por zeros.

[I]: Matriz identidade 6x6.

O software compilador executou o algoritmo proposto para a resolução do problema em 1.387236 segundos, de acordo com o comando “*tic toc*”, incluído no próprio algoritmo. Os deslocamentos dos *trucks* dianteiro e traseiro, bem como do centro de massa do vagão podem ser encontrados a seguir, na Figura 7, Figura 8 e Figura 9, respectivamente:

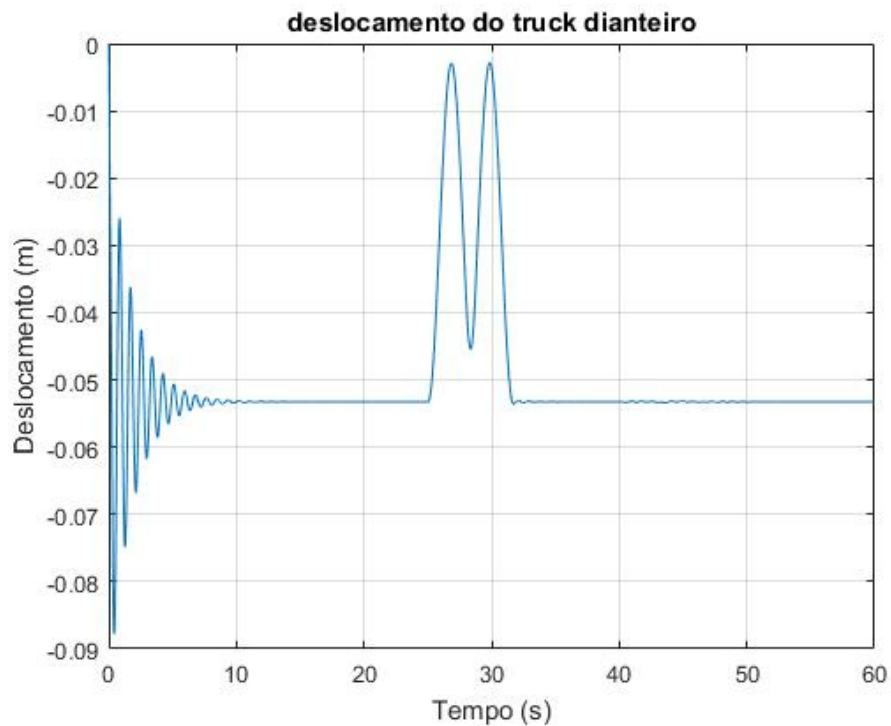


Figura 7: Deslocamento do *truck* dianteiro do vagão ao passar por uma lombada.

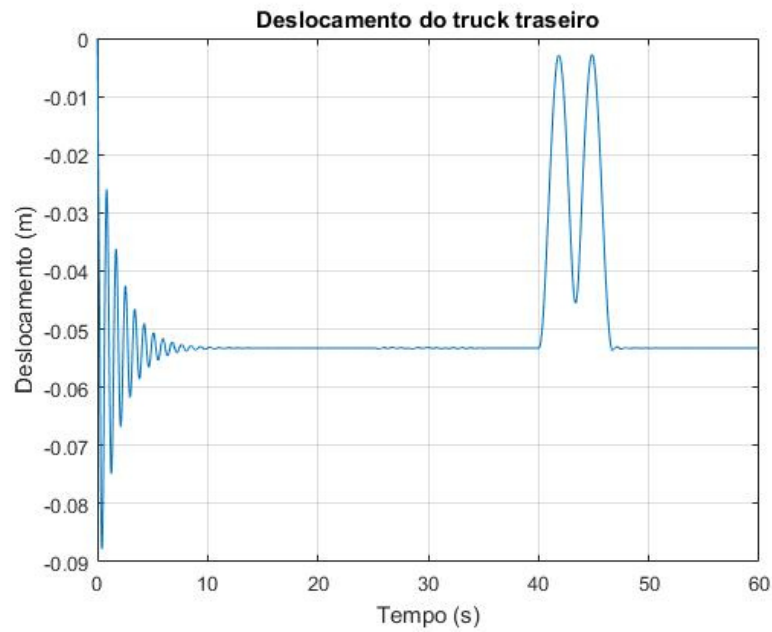


Figura 8: Deslocamento do *truck* traseiro do vagão ao passar por uma lombada.

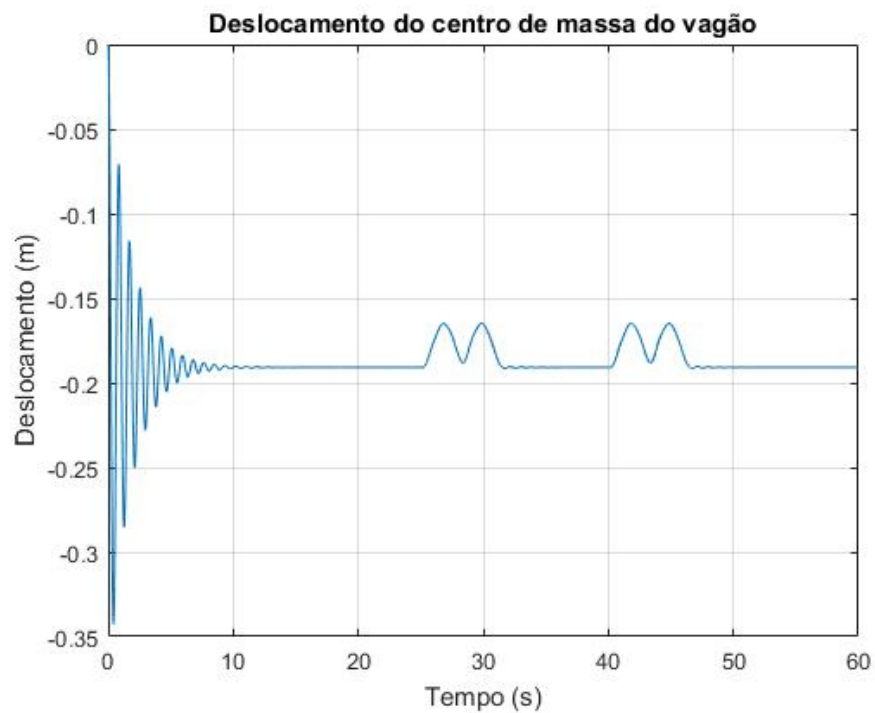


Figura 9: Deslocamento do centro de massa do vagão ao passar por uma lombada.

As figuras mostram o comportamento do veículo quando liberado do estado de repouso e solto. Inicialmente, sofrendo a ação do próprio peso, vibra até atingir o equilíbrio dinâmico, que posteriormente é perturbado pela ação do movimento de base, gerado, pela passagem sobre a lombada. Após algum tempo, é novamente reestabelecido o equilíbrio dinâmico do sistema.

Na Figura 7, o gráfico apresenta a oscilação quando é solto do estado original de repouso, e entra em estado de equilíbrio estático com relação ao plano horizontal. Após alguns segundos, o gráfico apresenta dois grandes picos, que representam a passagem das rodas do *truck* dianteiro pelo obstáculo. Semelhantemente, na Figura 8, o gráfico apresenta o mesmo padrão, apresentando o estado de equilíbrio estático, e após isso a perturbação gerada por conta da passagem das rodas traseiras sobre a lombada. A Figura 9 nos mostra o padrão referido anteriormente para o centro de massa do vagão, onde, depois de ter atingido o equilíbrio estático, os quatro pontos de máximo locais mostrados representam a passagem de cada uma das rodas pela lombada.

3.2 Acoplamento de dois vagões

Os modelos de vagões para o acoplamento de ambos são semelhantes ao modelo proposto no tópico 3.1. Os parâmetros físicos e geométricos são os mesmos, a exceção de duas diferenças. O ponto de acoplamento foi simulado neste trabalho como uma mola de alta rigidez sob efeito de compressão, de forma a sofrer passivamente os efeitos da movimentação do veículo. Como o objetivo deste trabalho não tem como foco o estudo em específico do acoplamento, seu valor de constante elástica de mola foi arbitrado de modo a garantir que seu deslocamento sofrido fosse tão menor quanto fosse possível, pois quanto menor o deslocamento apresentado, menor seria a compressão sofrida caso a mola idealizada fosse realmente um ponto de acoplamento projetado. Após simulações, foi escolhido o valor de $K_{acp} = 5 \times 10^7 \text{ N/m}$. Por conta do ponto de acoplamento do vagão, é necessário incluir uma nova constante, $x_e = 2,5 \text{ m}$, que representa a distância entre o *truck* traseiro do primeiro vagão e o ponto de acoplamento, bem como a distância entre o próprio ponto de acoplamento e o *truck* dianteiro do segundo vagão. Com o sentido da velocidade da composição indicado, a representação esquemática está feita a seguir, na Figura 10.

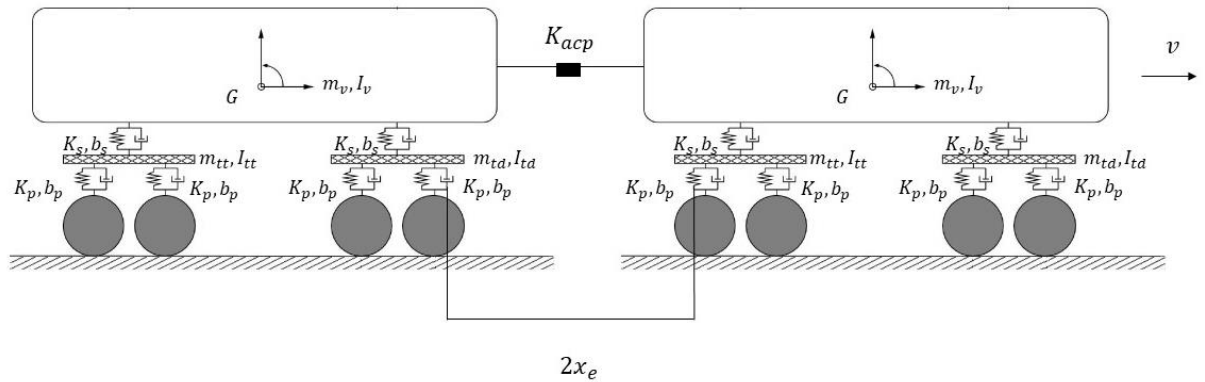


Figura 10: Modelo com vagões acoplados.

Os diagramas de corpo-livre para os *trucks* dianteiro e traseiro de ambos os vagões permanecem os mesmos. Os diagramas de corpo-livre para os vagões dianteiro e traseiro sofrem modificação por conta da força atuante na mola de constante K_{acp} , e estão demonstrados abaixo, na Figura 11 e Figura 12, respectivamente.

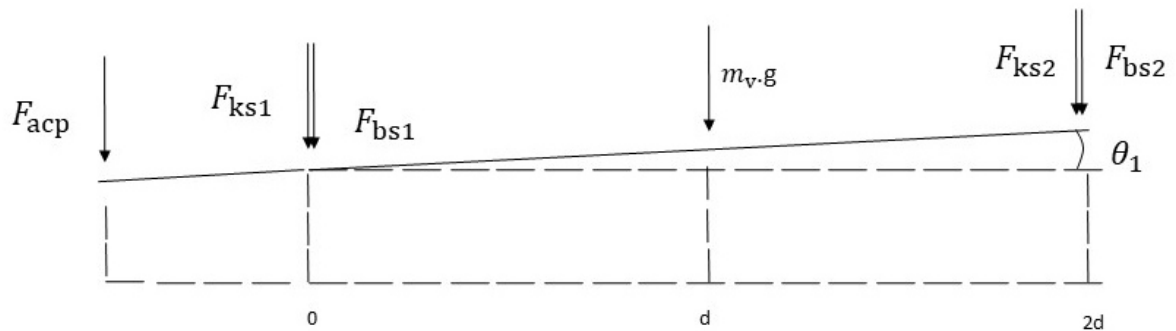


Figura 11: Diagrama de corpo-livre do vagão dianteiro, para o sistema de vagões acoplados.

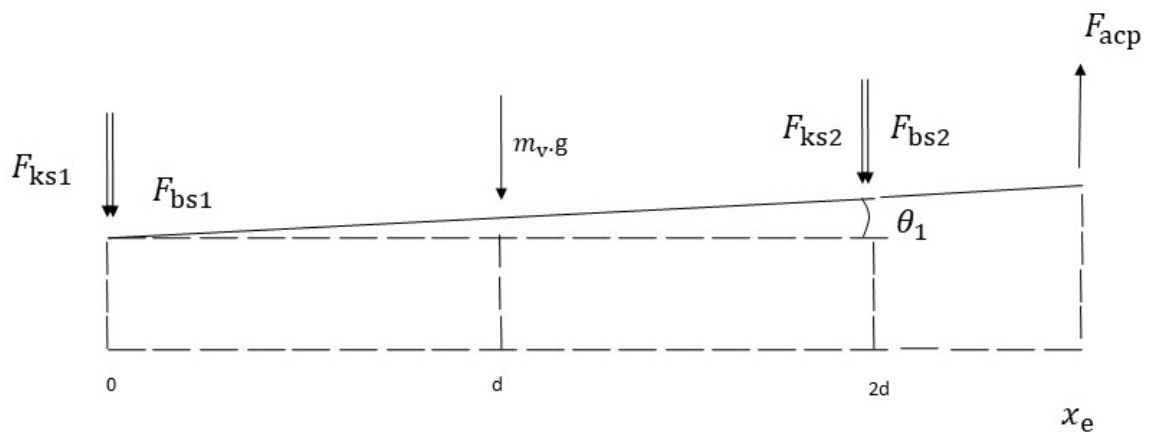


Figura 12: Diagrama de corpo-livre do vagão traseiro, para o sistema de vagões acoplados.

O método de equacionamento foi o mesmo utilizado no tópico 3.1 deste trabalho. As matrizes M, B e K, necessárias para a resolução proposto na Equação 3.19 se mantêm inalteradas e permanecem as mesmas para ambos os vagões, descritas respectivamente nas Equações 3.20, 3.21 e 3.22. A diferença está nas matrizes de forçamento. Para o vagão dianteiro, sua matriz $F_1(t)$ é:

$$F_1(t) = \begin{bmatrix} -m_v g - F_{acp} \\ -m_{tt}g + k_p y_{p1} + k_p y_{p2} + b_p \dot{y}_{p1} + b_p \dot{y}_{p2} \\ -m_{td}g + k_p y_{p3} + k_p y_{p4} + b_p \dot{y}_{p3} + b_p \dot{y}_{p4} \\ F_{acp}(d + x_e) \\ -k_p y_{p1}a + k_p y_{p2}a - b_p \dot{y}_{p1}a + b_p \dot{y}_{p2}a \\ -k_p y_{p3}a + k_p y_{p4}a - b_p \dot{y}_{p3}a + b_p \dot{y}_{p4}a \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

A Equação 3.28 mostra a matriz coluna $F_2(t)$, para o forçamento do vagão traseiro:

$$F_2(t) = \begin{bmatrix} -m_v g + F_{acp} \\ -m_{tt}g + k_p y_{p5} + k_p y_{p6} + b_p \dot{y}_{p5} + b_p \dot{y}_{p6} \\ -m_{td}g + k_p y_{p7} + k_p y_{p8} + b_p \dot{y}_{p7} + b_p \dot{y}_{p8} \\ F_{acp}(d + x_e) \\ -k_p y_{p5}a + k_p y_{p6}a - b_p \dot{y}_{p5}a + b_p \dot{y}_{p6}a \\ -k_p y_{p7}a + k_p y_{p8}a - b_p \dot{y}_{p7}a + b_p \dot{y}_{p8}a \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

A força F_{acp} citada nos equacionamentos anteriores é descrita a seguir, na Equação 3.29:

$$F_{acp} = K_{acp} \{ [z_{1d} - (d + x_e)\theta_{1d}] - [z_{1t} + (d + x_e)\theta_{1t}] \} \quad (3.29)$$

Onde:

z_{1d} = Deslocamento do centro de massa do vagão dianteiro;

z_{1t} = Deslocamento do centro de massa do vagão traseiro;

θ_{1d} = Ângulo de rotação do vagão dianteiro;

θ_{1t} = Ângulo de rotação do vagão traseiro.

Para implementação do algoritmo, é necessária outra manipulação matemática afim de facilitar a compilação dos dados, feita na Equação 3.30. Anteriormente chamada de matriz $\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix}$, agora cada vagão possui sua matriz de estados y_d e y_t , sendo o índice d correspondente ao vagão dianteiro e o índice t correspondendo ao vagão traseiro, respectivamente. Desta forma:

$$[y_d] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -M^{-1}K & -M^{-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ V \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] \\ M^{-1} \end{bmatrix} F_{1(t)} \quad (3.30)$$

$$[y_t] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -M^{-1}K & -M^{-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ V \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] \\ M^{-1} \end{bmatrix} F_{2(t)} \quad (3.31)$$

O agrupamento das matrizes é feito da seguinte forma:

$$[y] = \begin{bmatrix} [a_d] & [0] \\ [0] & [a_t] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_d \\ y_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} [0] \\ M^{-1} \end{bmatrix} & [0] \\ [0] & \begin{bmatrix} [0] \\ M^{-1} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{1(t)} \\ F_{2(t)} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Onde:

$$[a_d] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -M^{-1}K & -M^{-1}B \end{bmatrix};$$

$$[a_t] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -M^{-1}K & -M^{-1}B \end{bmatrix};$$

$F_{1(t)}$ e $F_{2(t)}$ são as matrizes coluna referentes aos forçamentos nos vagões dianteiro e traseiro, respectivamente. a_d e a_t são as matrizes de estado para o vagão dianteiro e vagão traseiro, nesta ordem.

O tempo de funcionamento do algoritmo foi de 15.232290 segundos. A compilação fornece os resultados desejados para os deslocamentos e ângulos em qualquer ponto do domínio do tempo, sendo possível calcular forças e reações. Na Figura 13, é mostrada a deformação na mola fictícia idealizada no ponto de acoplamento entre os vagões.

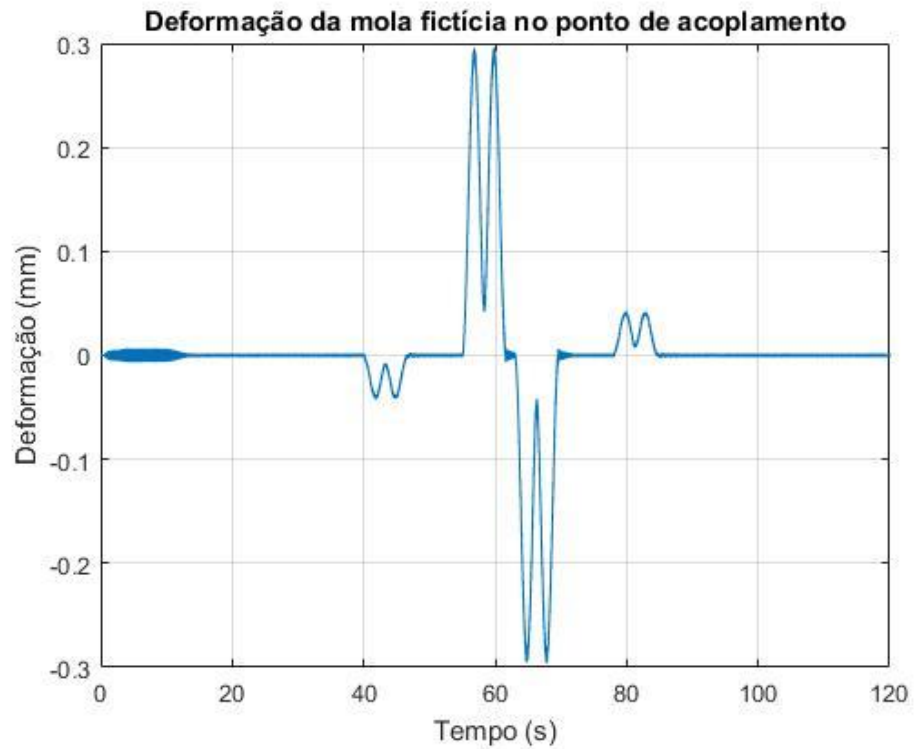


Figura 13: Deformação da mola no ponto de acoplamento entre os vagões.

A força de reação na mola está indicada na Figura 14:

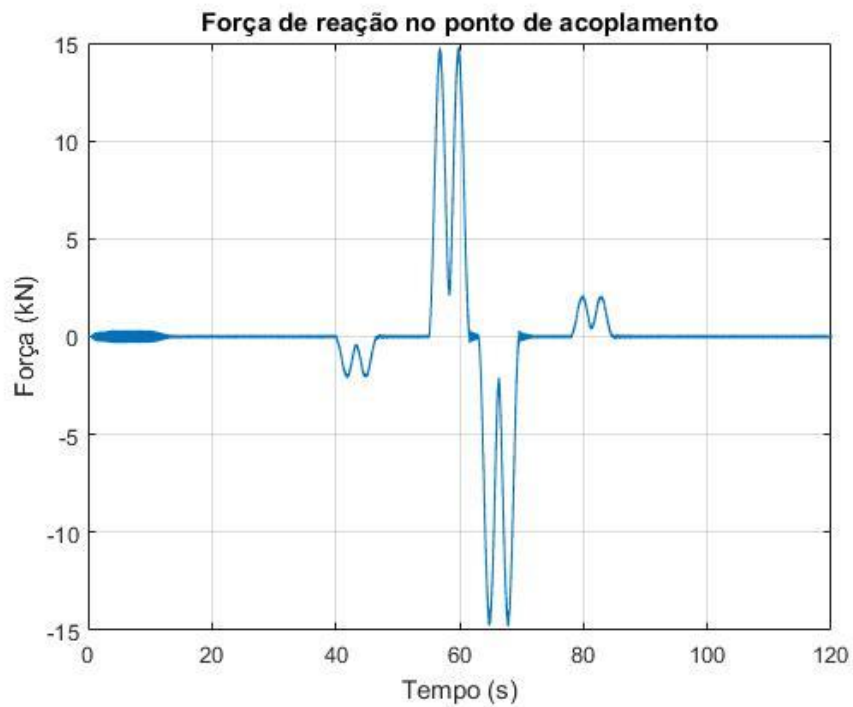


Figura 14: Força de reação no ponto de acoplamento.

Destaca-se, portanto, a importância de um estudo mais aprofundado sobre o ponto de acoplamento entre veículos rebocados. Para este modelo em questão, utilizando de meio vagão

trator e meio vagão rebocado, com massa de 22 toneladas cada, as forças de reação no ponto se aproximam dos 15kN quando o comboio passa por um obstáculo de 10 cm de altura, sendo, portanto, um ponto importante de análise em estudos futuros neste aspecto. Questões como material a ser utilizado, forma e geometria do acoplamento, distâncias são pontos passíveis de estudos, sendo essencial um maior aprofundamento nesta área quando se deseja projetar vagões rebocados. Como o foco deste trabalho é a análise dinâmica de modelos adaptados já existentes, não há um foco no projeto do acoplamento.

Segue também, na Figura 15 e na Figura 16, o deslocamento do centro de massa dos vagões dianteiro e traseiro, respectivamente.

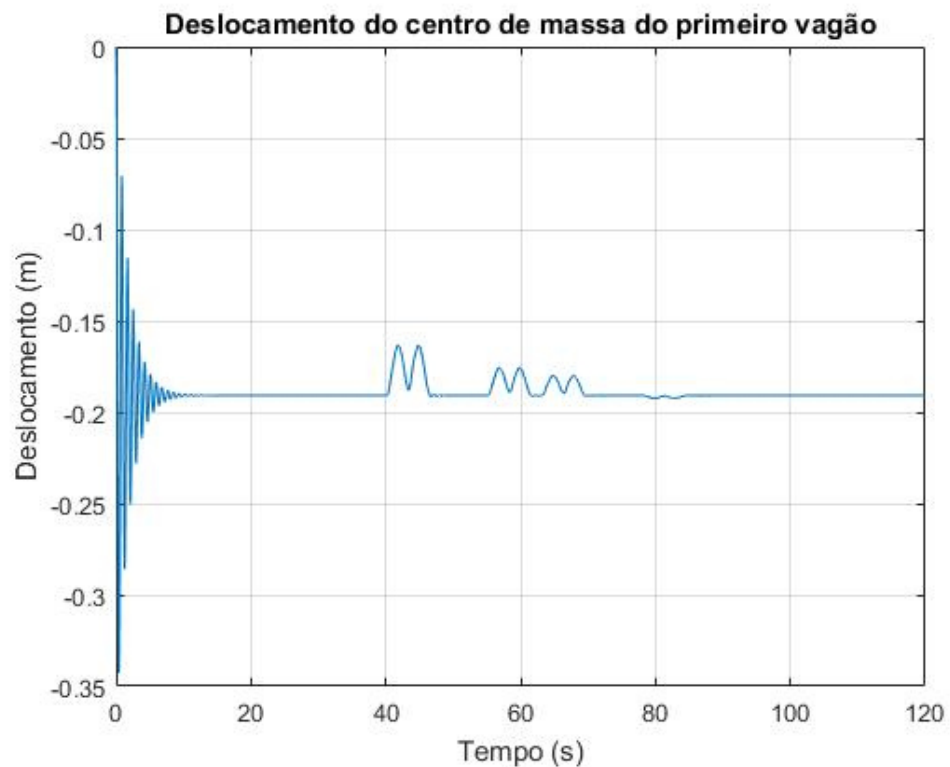


Figura 15: Deslocamento do centro de massa do vagão dianteiro.

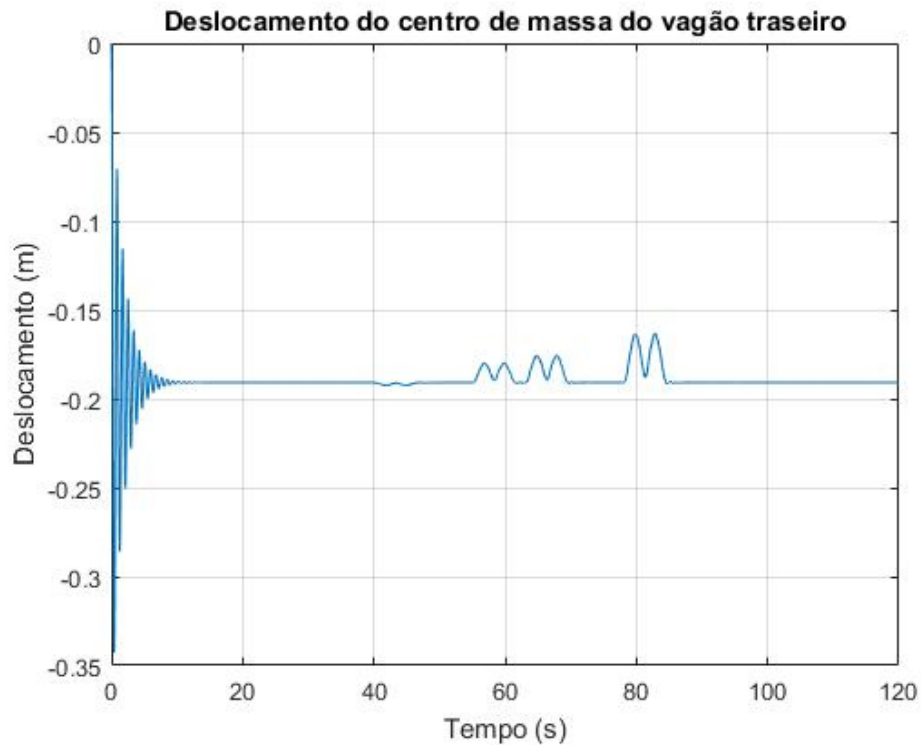


Figura 16: Deslocamento do centro de massa do vagão traseiro.

Mesmo pequena, é perceptível em ambos os gráficos uma pequena perturbação nos momentos próximos à passagem do ponto de acoplamento pela lombada, provocando assim uma perturbação com relação ao equilíbrio dinâmico tanto do vagão dianteiro quanto do vagão traseiro. Também se pode notar o movimento dos vagões quando o veículo passa pela lombada.

3.3 Modelo de ponte

O modelo de ponte utilizado neste trabalho é o mesmo utilizado em SILVA e OLIVEIRA (2015). Trata-se de uma ponte idealizada como uma viga bi-apoiada, com 6 elementos e 7 nós, com 14 graus de liberdade, sendo 7 ângulos de rotação e 5 deslocamentos. A Figura 17 traz a representação da ponte.

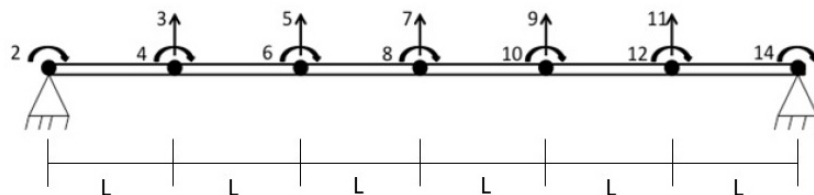


Figura 17: Representação do modelo de ponte e seus graus de liberdade. Adaptado de SILVA e OLIVEIRA (2015)

Os parâmetros físicos e geométricos da ponte são apresentados na Tabela 4:

| Constante | Valor | Unidade |
|--|-------------------|----------|
| Comprimento do elemento de viga (L) | 6,66 | m |
| Comprimento total da ponte (Lp) | 40 | m |
| Módulo de Elasticidade do aço (E) | 200×10^9 | Pa |
| Momento de Inércia de Área da seção transversal da ponte (I) | 8×10^3 | m^4 |
| Massa Específica do aço (ρ) | 7850 | kg/m^3 |
| Área da seção transversal da viga (A) | 0,48 | m^2 |

Tabela 4: Propriedades referentes ao modelo de ponte.

Conforme o modelo utilizado por SILVA e OLIVEIRA, a ponte foi considerada como uma viga caixão. Suas dimensões são 5780 mm de largura, 300 mm de espessura, e 40 mm de espessura de parede.

Cada elemento da viga é caracterizado como um elemento que possui quatro graus de liberdade, sendo dois ângulos e dois deslocamentos transversais. O modelo de elemento está representado a seguir, na Figura 18:

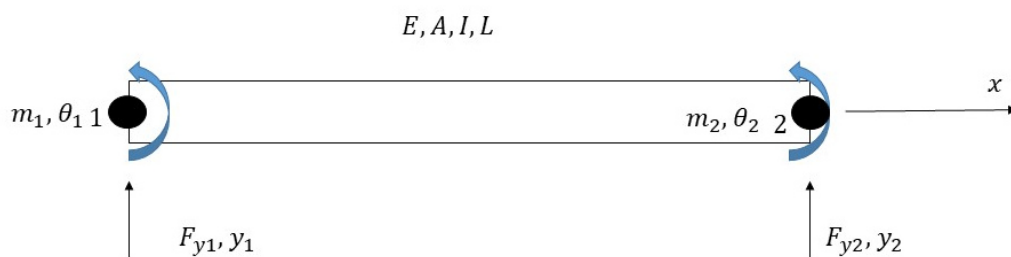


Figura 18: Modelo de elemento para a viga.

F_{y1} e F_{y2} são as forças nodais aplicadas nos nós 1 e 2 do elemento, respectivamente. Os deslocamentos transversais são y_1 e y_2 , enquanto m_1 e m_2 são os momentos aplicados nos nós 1 e 2, respectivamente. As rotações dos nós 1 e 2 são representadas por θ_1 e θ_2 .

Os graus de liberdade y_1 e y_2 , θ_1 e θ_2 são funções do tempo. O equacionamento para o deslocamento do elemento de viga no eixo y pode ser caracterizado como um produto entre uma função $N(x)$, dependente unicamente do deslocamento no eixo x da viga, e seu respectivo

grau de liberdade associado. O desenvolvimento numérico pode ser encontrado em SILVA e OLIVEIRA (2015). Desta forma, a equação 3.33 mostra a equação utilizada para o elemento:

$$y(x, t) = N_1 y_1 + N_2 \theta_1 + N_3 y_2 + N_4 \theta_2 \quad (3.33)$$

Onde:

$$N_1 = \frac{1}{L^3} (L^3 - 3x^2 + 2x^3)$$

$$N_2 = \frac{1}{L^3} (xL^3 - 2x^2L^2 + x^3L)$$

$$N_3 = \frac{1}{L^3} (3Lx^2 - 2x^3)$$

$$N_4 = \frac{1}{L^3} (-x^2L^2 + Lx^3)$$

Pode-se escrever a Equação 3.34 em sua forma matricial, que recebe o nome de função de forma para o elemento de viga.

$$y(x, t) = [N_1 N_2 N_3 N_4] \begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Utilizando-se das equações de Lagrange para os meios contínuos, como visto em SILVA (2016), podemos descrever os termos que compõem a matriz de rigidez da ponte utilizando a Equação 3.35:

$$k_{ij} = \int_L EA \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} dx \quad (3.35)$$

Onde ψ_i e ψ_j são as funções descritas anteriormente na função de forma, na Equação 3.33. Os índices i e j indicam a posição do termo na matriz K do elemento.

O mesmo procedimento pode ser feito utilizando para obter os termos referentes à matriz de massa do elemento, utilizando a Equação 3.36:

$$m_{ij} = \int_L \rho A \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} dx \quad (3.36)$$

Onde ρ é a massa específica do material constitutivo da ponte, e A é a área da seção transversal. Considerando os termos EA e ρA constantes, é possível encontrar a matriz K , representada na Equação 3.37. A matriz de massa para o elemento se encontra na equação 3.38.

$$k_p = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12L & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

$$m_p = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Ao expandir as matrizes das equações 3.37 e 3.38, para uma ponte com 6 elementos e 7 nós, com as condições de contorno referentes à uma viga bi-apoiada, são obtidas as matrizes K e M da ponte, expressas nas Equações 3.39 e 3.40.

$$K_p = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6L & 24 & 0 & -12 & 6L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -6L & 24 & 0 & 6L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & 2L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6L & 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

$$M_p = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 4L^2 & 13L & -3L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 13L & 312 & 0 & 54 & -13L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3L^2 & 0 & 8L^2 & 13L & -3L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L^2 & 312 & 0 & 54 & -13L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 8L^2 & 13L & -3L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 54 & 13L & 312 & 0 & 54 & -13L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 8L^2 & 13L & -3L^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & 13L^2 & 312 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 8L^2 & 13L & -3L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & 13L & 312 & 0 & -13L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 8L^2 & -3L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13L & -3L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Semelhante ao que fora utilizado em SILVA e OLIVEIRA (2015), a matriz de amortecimento B também será descrita como uma fração da soma das matrizes K e M referentes a ponte, conforme a Equação 3.41.

$$[B_p] = 0,1 \{ [K_p] + [M_p] \} \quad (3.41)$$

Já o forçamento em cada elemento é definido como uma força conhecida e já calculada previamente em um determinado ponto x, pertencente ao elemento de comprimento L. A força é decomposta em outras duas forças, aplicadas sobre os nós de cada elemento, conforme o esquema apresentado na Figura 19:

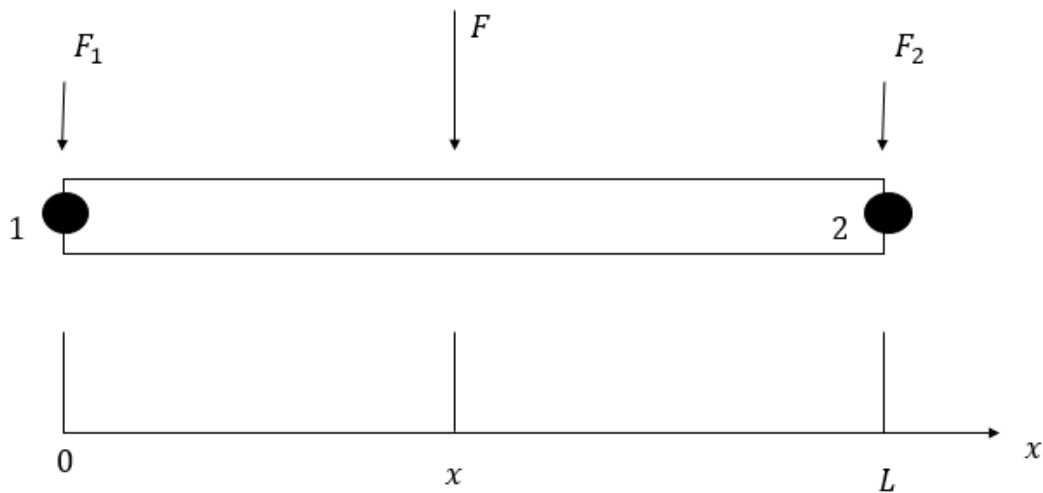


Figura 19: Decomposição da força nos nós do elemento de viga.

Onde:

F é uma força já conhecida;

F_1 e F_2 são descritas pelas Equações 3.42 e 3.43:

$$F_1 = \left(\frac{L-x}{L} \right) F \quad (3.42)$$

$$F_2 = \left(\frac{x}{L} \right) F \quad (3.43)$$

Desta maneira, o forçamento na ponte é indicado pela matriz coluna expressa na Equação 3.44:

$$F_p = \begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \\ F_{10} \\ F_{11} \\ F_{12} \\ F_{14} \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Capítulo 4

Acoplamento de modelos de vagão e ponte

Este capítulo apresenta os resultados obtidos para os modelos de vagão único e dois vagões acoplados à ponte definida no tópico 3.3.

4.1 Vagão único passando pela ponte

Com o modelo de vagão único testado no tópico 3.1, para efetuar o acoplamento de ambos os modelos será feita uma manipulação matemática semelhante a que foi feita no tópico 3.2 para acoplamento de vagões. O equacionamento está descrito a seguir:

$$[yp_v] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -M^{-1}K & -M^{-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ V \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] \\ M^{-1} \end{bmatrix} F(t) \quad (4.1)$$

$$[yp_p] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -M_p^{-1}K_p & -M_p^{-1}B_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ V \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] \\ M_p^{-1} \end{bmatrix} F_p(t) \quad (4.2)$$

O agrupamento das matrizes é feito da seguinte forma:

$$[y] = \begin{bmatrix} [a_v] & [0] \\ [0] & [a_p] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_v \\ y_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} [0] \\ M^{-1} \end{bmatrix} & [0] \\ [0] & \begin{bmatrix} [0] \\ M_p^{-1} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F(t) \\ F_p(t) \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Onde

y_v e y_p são as matrizes coluna com as soluções para o veículo e ponte, respectivamente;

$$[a_v] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -M^{-1}K & -M^{-1}B \end{bmatrix};$$

$$[a_p] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -M_p^{-1}K_p & -M_p^{-1}B_p \end{bmatrix}.$$

Desta forma, as Figuras 20 e 21, respectivamente, mostram os deslocamentos do centro de massa do vagão durante o domínio do tempo, bem como o deslocamento do nó central da

ponte. O tempo de execução do algoritmo foi de 134.85 segundos . A velocidade do vagão foi arbitrada como 5 m/s.

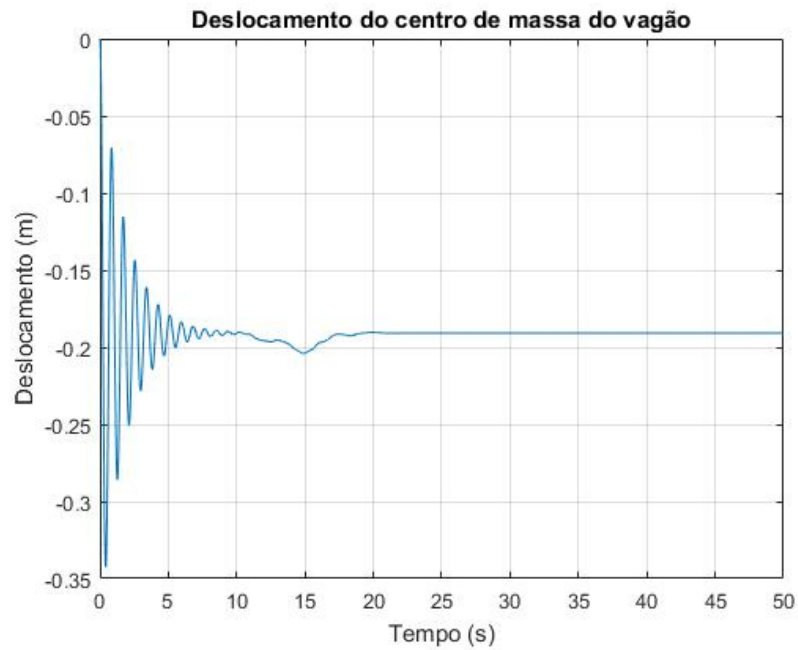


Figura 20: Deslocamento do centro de massa do vagão ao passar pela ponte.

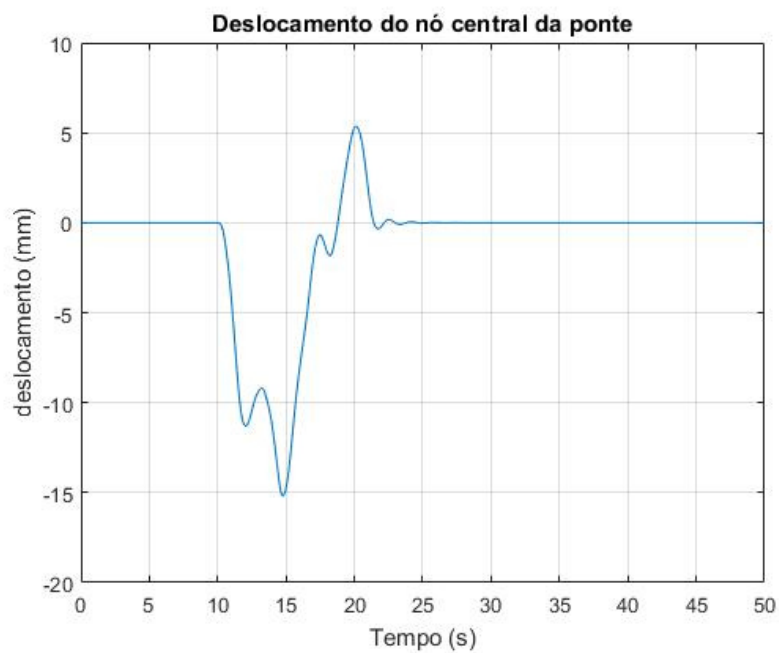


Figura 21: Deslocamento do nó central da ponte quando submetida à passagem de um único vagão.

A análise dos dados gráficos nos permite observar que o nó central da ponte é submetido a uma variação absoluta de aproximadamente 20 milímetros com relação ao seu estado de repouso.

O estudo se evidencia como essencial para a segurança das pessoas envolvidas na operação do vagão, seja o vagão usado para transporte de carga ou de passageiros. Para o modelo em análise, os resultados obtidos em simulação condizem com a expectativa teórica, isto é, a ponte apresenta um pequeno deslocamento provocado pela passagem do vagão. Já o vagão apresenta um pequeno valor de variação em seu centro de massa quando passa pela ponte, em comparação com o valor de deslocamento obtido após entrar em estado de equilíbrio estático com relação ao plano horizontal. Isto significa dizer que a ponte absorve os efeitos dinâmicos causados pela passagem do vagão, que são transmitidos a este vagão, cuja suspensão absorve os esforços decorrentes dessa interação ponte-vagão. Ou seja, a ponte sofre uma pequena deflexão quando submetida à passagem do vagão, e o vagão sofre uma variação muito pequena em seu centro de massa quando passa pela ponte.

4.2 Dois vagões acoplados passando pela ponte

Semelhantemente ao que fora feito anteriormente, uma nova manipulação matemática é necessária para a resolução do algoritmo proposto. O equacionamento vem a seguir:

$$[y_d] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -M^{-1}K & -M^{-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ V \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] \\ M^{-1} \end{bmatrix} F_{1(t)}$$

$$[y_t] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -M^{-1}K & -M^{-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ V \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] \\ M^{-1} \end{bmatrix} F_{2(t)}$$

O agrupamento das matrizes é feito da seguinte forma:

$$[y] = \begin{bmatrix} [a_d] & [0] \\ [0] & [a_t] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_d \\ y_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} [0] \\ M^{-1} \end{bmatrix} & [0] \\ [0] & \begin{bmatrix} [0] \\ M^{-1} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{1(t)} \\ F_{2(t)} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Onde:

$$[a_d] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -M^{-1}K & -M^{-1}B \end{bmatrix};$$

$$[a_t] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -M^{-1}K & -M^{-1}B \end{bmatrix}.$$

$$\text{Seja } y_1 = \begin{bmatrix} [a_d] & [0] \\ [0] & [a_t] \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Utilizando estas mesmas etapas, podemos obter a solução para o equacionamento na Equação 4.6:

$$[Y_2] = \begin{bmatrix} [y_1] & [0] \\ [0] & [a_p] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_v \\ y_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] \\ [M^{-1}] \\ [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [0] \\ [0] \\ [M_p^{-1}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{ac}(t) \\ F_p(t) \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Onde:

$$[a_p] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -M_p^{-1}K_p & -M_p^{-1}B_p \end{bmatrix};$$

$$F_{ac}(t) = \begin{bmatrix} F_{1(t)} \\ F_{2(t)} \end{bmatrix};$$

$F_{1(t)}$ e $F_{2(t)}$ são as matrizes coluna referentes aos forçamentos nos vagões dianteiro e traseiro, respectivamente. A matriz a_p é a matriz de estados para a ponte.

A matriz coluna $\begin{bmatrix} y_v \\ y_p \end{bmatrix}$ apresenta a solução do problema, sendo y_v o vetor coluna com a solução para os vagões dianteiro e traseiro, respectivamente nesta ordem, e y_p é o vetor coluna com a solução para a ponte. Desta maneira, a compilação do algoritmo nos disponibiliza os resultados a seguir. O tempo total de execução do algoritmo foi de 427.7 segundos.

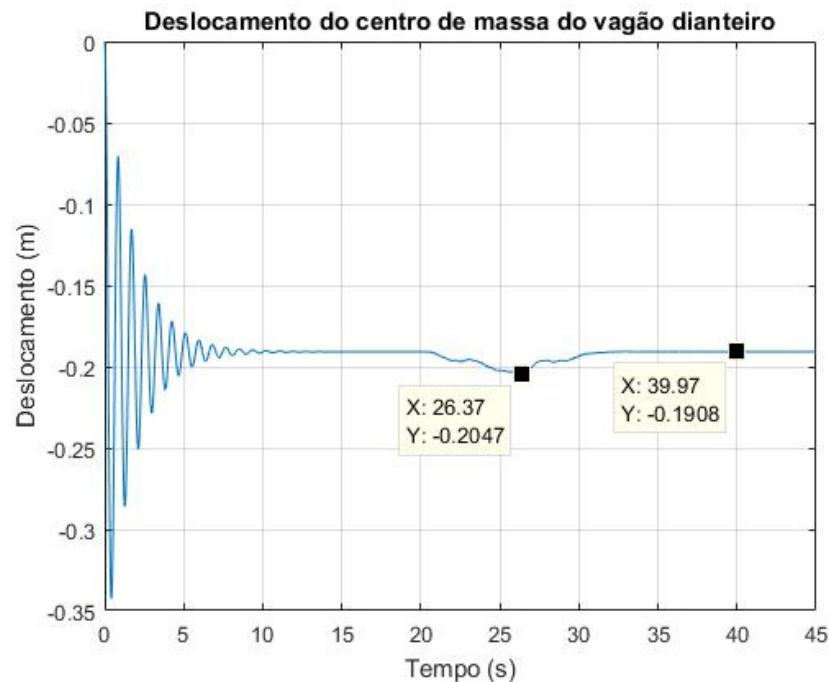


Figura 22: Deslocamento do centro de massa do vagão dianteiro.

De acordo com os dados obtidos na análise do gráfico, durante a passagem sobre a ponte, o vagão dianteiro sofreu uma variação absoluta em relação ao estado de equilíbrio estático de valor igual a 13,9 milímetros. A Figura 23 nos mostra os dados obtidos com relação ao vagão traseiro.

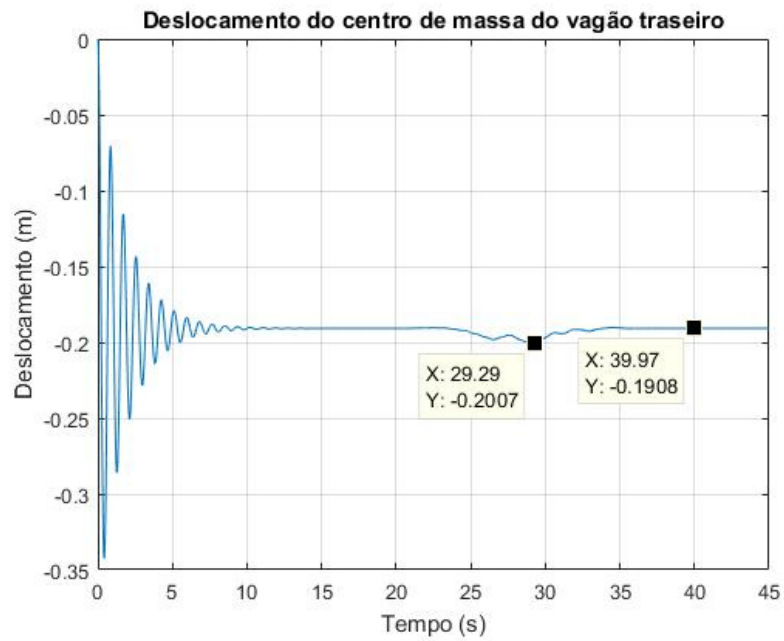


Figura 23: Deslocamento do centro de massa do vagão traseiro.

Já para o vagão traseiro, o deslocamento do centro de massa com relação à configuração de equilíbrio dinâmico foi de 9,9 milímetros, aproximadamente.

A deformação na mola no acoplamento, bem como a força de reação no acoplamento estão mostradas nas Figuras 24 e 25, respectivamente.

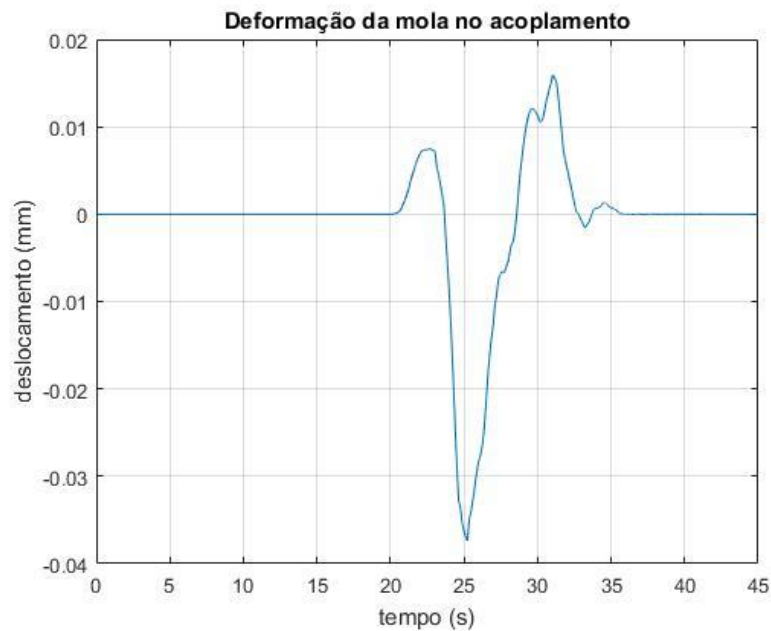


Figura 24: Deformação na mola no ponto de acoplamento.

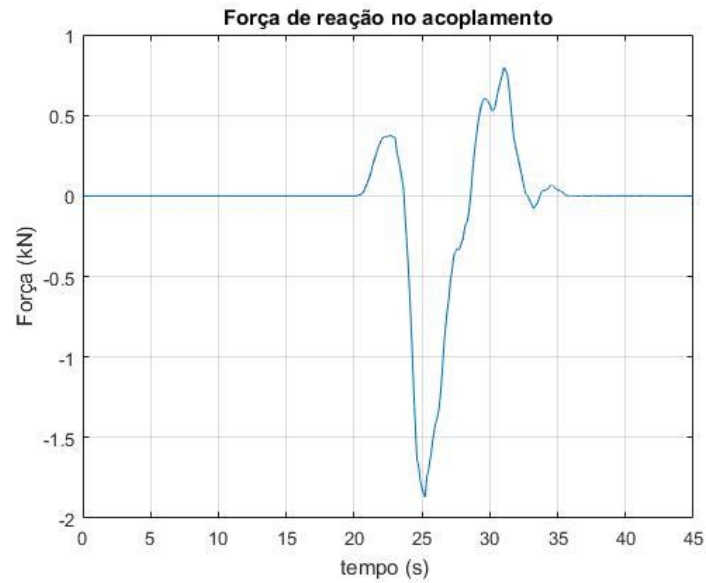


Figura 25: Força de reação na mola no ponto de acoplamento.

A partir dos dados obtidos acima para um acoplamento idealizado como um ponto único é possível ter um ponto de partida para um possível projeto de acoplamento, envolvendo parâmetros de projeto como material a ser utilizado, geometria, disposição, forma de encaixe. As forças e deformações da mola mostradas nas figuras acima permitem formar um parâmetro base para uma futura modelagem desta importante parte integrante do sistema.

O deslocamento do nó central da ponte durante o domínio do tempo está mostrado na Figura 26.

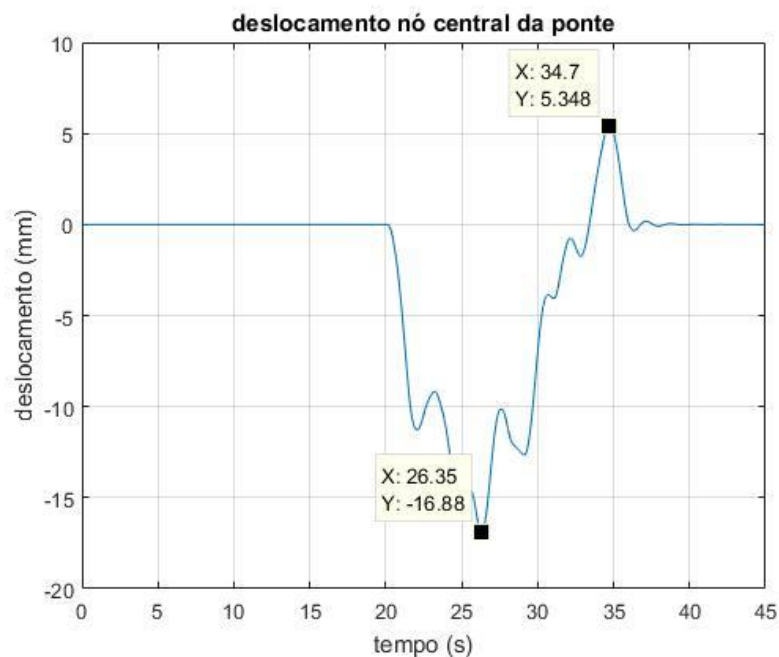


Figura 26: Deslocamento do nó central da ponte.

A ponte sofre um deslocamento negativo em seu nó central, tendo seu estado de equilíbrio dinâmico restaurado após a passagem do veículo. A variação absoluta de deslocamento do nó central foi de 22,23 milímetros.

Por fim, outros parâmetros de projeto podem ser analisados. As forças internas de sollicitação nas suspensões dos *trucks* e do vagão são de essencial análise para garantir a estabilidade e segurança da composição, e, por consequência, dos passageiros e carga transportados. Por exemplo, a Figura 27 nos mostra a sollicitação imposta à mola traseira da suspensão secundária, isto é, a mola traseira presente na suspensão entre o vagão e os *trucks*.

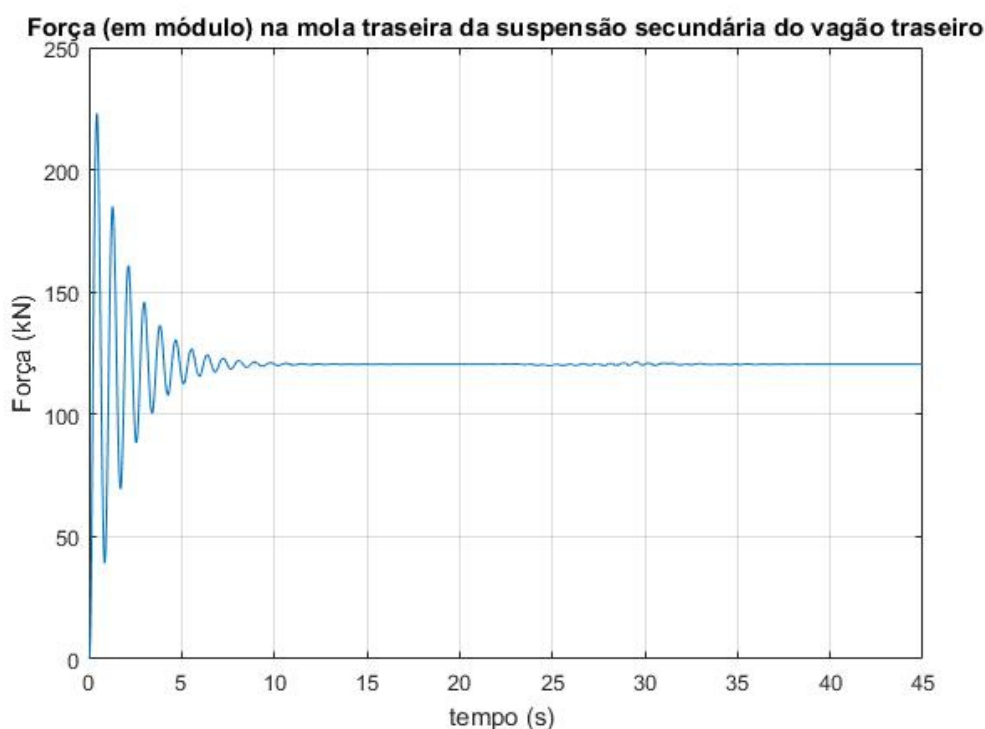


Figura 27: Força em módulo na mola traseira da suspensão secundária do vagão traseiro.

A análise do gráfico exposto na Figura 27, referente à passagem do veículo sobre a ponte, mostra que a sollicitação imposta nessa mola é desprezível, em comparação ao estado de equilíbrio estático em relação ao plano horizontal. Apesar da sollicitação imposta se mostrar indiferente ao nível de equilíbrio estático, este é um ponto importante de análise no projeto da mola, sabendo dos obstáculos a serem enfrentados pelos vagões – neste caso em específico, a ponte –, pois o resultado da simulação com a variação em módulo das sollicitações impostas ao veículo mostra-se indispensável. Parâmetros de projeto como sollicitação máxima a ser atingida e sollicitação média podem ser simulados, afim de ter uma base de cálculo para o projeto das molas ou amortecedores.

Conclusões

O objetivo principal deste trabalho foi a analisar dinamicamente a passagem de dois vagões acoplados sobre uma ponte, e obter informações referentes às solicitações impostas pelos vagões na ponte, bem como informações referentes às solicitações internas na estrutura do vagão. Para realizar este estudo, primeiro foi elaborado um modelo de vagão único, descrito matematicamente no tópico 3.1 deste projeto, e seu algoritmo de resolução foi implementado em software compilador, com seu código mostrado no apêndice I.

Posteriormente, foi elaborado um modelo matemático para a resolução do problema envolvendo a passagem de dois vagões acoplados passando por uma lombada. O código referente a este algoritmo se encontra no apêndice II.

Fora desenvolvido também um modelo matemático para a passagem de um único vagão passando pela estrutura proposta, cujo código encontra-se no apêndice III.

Por fim, foco principal deste estudo, foi elaborado um modelo matemático envolvendo o acoplamento do modelo de ponte e do modelo de vagões acoplados, desenvolvidos anteriormente. O código para a compilação do algoritmo não apresenta diferença considerável em relação ao código mostrado no apêndice II, sendo suprimido deste trabalho. A principal diferença está na quantidade de linhas de código. De qualquer forma, o algoritmo para resolução do problema está descrito no tópico 4.2 deste trabalho, sendo possível a utilização do código presente no anexo III como base para sua implementação.

O estudo se mostrou importante para a compreensão dos fenômenos físicos que acontecem durante a passagem do veículo sobre a estrutura, e suas implicações. Os modelos de veículos analisados apresentaram baixas variações de deslocamento nos centros de gravidade dos vagões, durante a passagem sobre a ponte, em comparação ao deslocamento atingido durante a configuração de equilíbrio dinâmico. Este fato mostra que o sistema proposto está de acordo com o esperado teoricamente, onde a suspensão amortece as solicitações impostas ao veículo, e desta maneira, o deslocamento do centro de massa dos vagões apresenta valores tão pequenos quanto possíveis, de maneira a apresentar um aparente equilíbrio estático com relação ao plano horizontal.

Mesmo não sendo o foco deste trabalho, foi possível analisar a influência dos resultados obtidos em um possível projeto dos elementos das suspensões. Como o exemplo analisado durante o trabalho demonstrou, para o caso dos vagões acoplados passando pela ponte, com os valores de deslocamentos obtidos e seus respectivos valores de reações calculadas, o valor

destas reações se mostrou praticamente indiferente ao valor atingido durante o equilíbrio estático. Isso significa dizer que os deslocamentos causados na ponte não geram solicitações grandes o suficiente para perturbar os veículos acoplados, que permanecem em um aparente equilíbrio estático. No caso do projeto de um elemento de mola para esta suspensão, fatores importantes de projeto como tensão última e tensão média poderiam utilizar estes valores obtidos na simulação como base.

Como sugestões para possíveis novos trabalhos de conclusão de curso a serem realizados nesta área de conhecimento:

- Analisar as condições de rodagem para mais graus de liberdade, isto é, utilizando um modelo de veículo mais sofisticado;
- Analisar as condições de rodagem do sistema proposto em relação a outros eixos de movimentação do veículo – neste trabalho, o eixo estudado fora o eixo de arfagem;
- Analisar as condições de rodagem para situações envolvendo acelerações e desacelerações da composição;
- Analisar as condições de rodagem incluindo o contato do pneu com o solo, isto é, sem considerar o pneu um objeto indeformável e que não absorve energia em forma de amortecimento;
- Analisar a interação entre as rodas e os trilhos em um trajeto curvilíneo;
- Utilizar o modelo de meio veículo como ponto de partida para o projeto de projeto das molas e amortecedores dos vagões. Verificar, neste caso, a necessidade de estudo do modelo envolvendo o veículo completo, além incluir análises dos eixos de guinada e rolagem, além do eixo de arfagem já citado previamente.

Referências Bibliográficas

BELLIS, Mary. **The history of railroad technology: from Greek trackways to tomorrow hyperloop trains.** 2019. Disponível em: <<https://www.thoughtco.com/history-of-railroad-4059935>>. Acesso em: 24 out. 2019, 07:45:00.

BRASIL. **RESOLUÇÃO Nº 39, DE 21 DE MAIO DE 1998.** Estabelece os padrões e critérios para a instalação de ondulações transversais e sonorizadores nas vias públicas disciplinados pelo Parágrafo único do art. 94 do Código de Trânsito Brasileiro. Disponível em: <http://www.camara.leg.br/proposicoesWeb/prop_mostrarintegra;jsessionid=F7942D5E6867E13EAC2276579099167B.proposicoesWebExterno2?codteor=450324&filename=LegislacaoCitada+-INC+301/2007>. Acesso em 24 out. 2019, 10:00:00.

FERREIRA, Narciso Jorge. **Comportamento dinâmico de pontes ferroviárias de alta velocidade constituídas por vigas pré-fabricadas.** 2008. 117 f. Dissertação de mestrado (Pós-graduação em engenharia civil). Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa: 2008.

HIBBELER, R.C. **Resistência dos materiais.** 7. ed. São Paulo, Pearson Prentice Hall, 2010.

OLIVEIRA, Leonardo Covatti de. **Efeitos dinâmicos em ponte férrea diante da variação de velocidade em um veículo ferroviário.** 2016. 60 f. Trabalho de conclusão de curso (graduação em engenharia civil). Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba: 2016.

RAO, Singiresu S. **Vibrações Mecânicas.** 4. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.

REMOR, Juliana Pereira Rego. **Estudo do comportamento dinâmico de uma ponte ferroviária considerando os efeitos do lastro e da irregularidade da via.** 2017. 114 f. Dissertação de mestrado (Pós-graduação em engenharia civil). Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba: 2017.

SILVA, Fernando R. da. **Curso de vibrações mecânicas.** Rio de Janeiro: 2016. Disponível em: <<http://drive.google.com/file/d/1GTqGT73UjST5frfsJDCg1biNq18luRc9/view>>. Acesso em: 24 out. 2019, 07:47:15.

SILVA, Gustavo Winter; OLIVEIRA, Lucas B. de. **Modelagem, simulação e projeto de absorvedores passivos de vibrações em pontes.** 2015. 58 f. Trabalho de conclusão de curso (graduação em engenharia mecânica). Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, Rio de Janeiro: 2015.

WILLIS, R. **Appendix to the Report of the Commissioners Appointed to Inquire into the Application of Iron to Railway Structures.** 1849. Stationary Office, London, 1849.

Apêndice I: Rotina para a solução do modelo de vagão único passando por uma lombada

```

clear
close all
tic
global mv mtt mtd g kp ks bp bs yc v xqm a d D W t1 t2 t3 t4 Iv Itt Itd F X
Y tf xe Kacp
mv=49120/2; %Massa do vagão [kg] %
mtt=11000/2 %massa do truck traseiro [kg]%
mtd=11000/2; %massa do truck dianteiro [kg]%
g=9.81; %aceleração da gravidade%
kp=1637275; %Rigidez das molas da suspensão primária[N/m]%
ks=875665; %Rigidez das molas da suspensão traseira [N/m]%
Kacp=10000;
bp=32745.5; %Constante de amortecimento da suspensão primária [Ns/m]%
bs=17513.1; %Constante de amortecimento da suspensão secundária [Ns/m]]%
Iv=2008950/2; %Momento de inércia do vagão [Kg.m²]%
Itt=20800/2; %Momento de inércia do truck traseiro [Kg.m²]%
Itd=20800/2; %Momento de inércia do truck dianteiro [Kg.m²]%
mv
mtd
mtt
Iv
Itt
Itd
d=7.5; %distância do centro do vagão até as suspensões dianteira/traseira
[m]%
a=1.5; %metade da distância longitudinal entre as rodas [m]%
xe=3; %distância entre o eixo traseiro e o ponto de acoplamento [m]%
F=0; %força f aplicada no acoplamento [N]%
yc=0.1; %altura do quebra-molas [m]%
v=1; %velocidade da composição [m/s]
xqm=3.70; %comprimento do quebra-molas [m]%
D=25; %distância da primeira roda até o quebra molas [m]%
W=(v*2*pi)/xqm; %Velocidade angular [rad/s];
t1=D/v; %tempo da primeira roda até o quebra-molas [s]%
t2= t1 + (2*a)/v; %tempo da segunda roda até o quebra-molas [s]%
t3= t2 + ((2*d)-(2*a))/v; %tempo da terceira roda até o quebra-molas [s]%
t4= t3 + (2*a)/v; %tempo da quarta roda até o quebra-molas [s]%
tf = 60; %tempo final [s]%

M = [ mv  0  0  0  0  0;
      0 mtt 0  0  0  0;
      0  0 mtd 0  0  0;
      0  0  0 Iv  0  0;
      0  0  0  0 Itt  0;
      0  0  0  0  0 Itd];
%Matriz M%

B = [(2*bs) (-bs) (-bs) (0) (0) (0);
      (-bs) (2*bp-bs) (0) (bs*d) (0) (0);
      (-bs) (0) (2*bp-bs) (-bs*d) (0) (0);
      (0) (bs*d) (-bs*d) ( 2*bs*d^2) (0) (0);
      (0) (0) (0) (0) (2*bp*(a^2)) (0);
      (0) (0) (0) (0) (0) (2*bp*a^2)];
%Matriz B%

```

```

K = [(2*ks) (-ks) (-ks) (0) (0) (0);
      (-ks) (2*kp-ks) (0) (ks*d) (0) (0);
      (-ks) (0) (2*kp-ks) (-ks*d) (0) (0);
      (0) (ks*d) (-ks*d) (2*ks*d^2) (0) (0);
      (0) (0) (0) (0) (2*kp*a^2) (0);
      (0) (0) (0) (0) (0) (2*kp*a^2)];
%Matriz K%

X = [zeros(6) eye(6);
      -inv(M)*K -inv(M)*B;];

Y = [zeros(6);
      inv(M);];

tspan=[0 tf];
y0=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
%estado inicial [z1 z2 z3 teta1 teta2 teta3]%
[t,y]=ode45('testevagaol',tspan,y0);
n=length(t);
z1=y(1:n,1);
z2=y(1:n,2);
z3=y(1:n,3);
teta1=y(1:n,4);
teta2=y(1:n,5);
teta3=y(1:n,6);

figure (1)
plot (t, z1)
title ('Deslocamento do centro de massa do vagão')
grid on
xlabel ('Tempo (s)')
ylabel ('Deslocamento (m)')

figure (2)
plot (t, z2)
title ('Deslocamento do truck traseiro')
grid on
xlabel ('Tempo (s)')
ylabel ('Deslocamento (m)')

figure (3)
plot (t, z3)
title ('deslocamento do truck dianteiro')
grid on
xlabel ('Tempo (s)')
ylabel ('Deslocamento (m)')

toc

function yp=testevagaol (t,y)
global v yc F W t1 t2 t3 t4 xqm mv mtt mtd g d xe yp1 ypp1 yp2 ypp2 yp3
ypp3 yp4 ypp4 Ft kp bp a X Y

if(t<t1)
    yp1=0;

```

```

        ypp1=0;
elseif (t>(t1+(xqm/v)))
    yp1=0;
    ypp1=0;
else
    yp1=(yc/2)*(1-cos(W*(t-t1)));
    ypp1=(yc/2)*(W*sin(W*(t-t1)));
end

if(t<t2)
    yp2=0;
    ypp2=0;
elseif (t>(t2+(xqm/v)))
    yp2=0;
    ypp2=0;
else
    yp2=(yc/2)*(1-cos(W*(t-t2)));
    ypp2=(yc/2)*(W*sin(W*(t-t2)));
end

if(t<t3)
    yp3=0;
    ypp3=0;
elseif (t>(t3+(xqm/v)))
    yp3=0;
    ypp3=0;
else
    yp3=(yc/2)*(1-cos(W*(t-t3)));
    ypp3=(yc/2)*(W*sin(W*(t-t3)));
end

if(t<t4)
    yp4=0;
    ypp4=0;
elseif (t>(t4+(xqm/v)))
    yp4=0;
    ypp4=0;
else
    yp4=(yc/2)*(1-cos(W*(t-t4)));
    ypp4=(yc/2)*(W*sin(W*(t-t4)));
end

Ft=[-mv*g+F;
    -mtd*g+kp*yp3+kp*yp4+bp*ypp3+bp*ypp4;
    -mtt*g+kp*yp1+kp*yp2+bp*ypp1+bp*ypp2;
    F*(d+xe);
    -kp*yp3*a-bp*ypp3*a+kp*yp4*a+bp*ypp4*a;
    -kp*yp1*a-bp*ypp1*a+kp*yp2*a+bp*ypp2*a];

yp=X*y+Y*Ft;

```


Apêndice II: Rotina para a solução dos vagões acoplados passando pela lombada

```

clear
close all
tic
global mv mtt mtd g kp ks bp bs yc v xqm a d D W t1 t2 t3 t4 t5 t6 t7 t8 Iv
Itt Itd invm Estados tf xe Kacp E2
mv=49120/2; %Massa do vagão [kg] %
mtt=11000/2; %massa do truck traseiro [kg]%
mtd=11000/2; %massa do truck dianteiro [kg]%
g=9.81; %aceleração da gravidade%
kp=1637275; %Rigidez das molas da suspensão primária[N/m]%
ks=875665; %Rigidez das molas da suspensão traseira [N/m]%
Kacp=5e7; %Rigidez fictícia do acoplamento [N/m]
bp=32745.5; %Constante de amortecimento da suspensão primária [Ns/m]%
bs=17513.1; %Constante de amortecimento da suspensão secundária [Ns/m]]%
Iv=2008950/2; %Momento de inércia do vagão [Kg.m²]%
Itt=20800/2; %Momento de inércia do truck traseiro [Kg.m²]%
Itd=20800/2; %Momento de inércia do truck dianteiro [Kg.m²]%
d=7.5; %distância do centro do vagão até as suspensões dianteira/traseira
[m]%
a=1.5; %metade da distância longitudinal entre as rodas [m]%
xe=2.5; %distância entre o eixo traseiro e o ponto de acoplamento [m]%
yc=0.1; %altura do quebra-molas [m]%
v=1; %velocidade da composição [m/s]
xqm=3.70; %comprimento do quebra-molas [m]%
D=40; %distância da primeira roda até o quebra molas [m]%
W=(v*2*pi)/xqm; %Velocidade angular [rad/s];
t1=D/v; %tempo da primeira roda até o quebra-molas [s]%
t2= t1 + (2*a)/v; %tempo da segunda roda até o quebra-molas [s]%
t3= t2 + ((2*d)-(2*a))/v; %tempo da terceira roda até o quebra-molas [s]%
t4= t3 + (2*a)/v; %tempo da quarta roda até o quebra-molas [s]%
t5= t4 + (2*xe); %tempo da primeira roda do vagão traseiro até o quebra
molas [s]
t6= t5 + (2*a); %tempo da segunda roda do vagão traseiro até o quebra molas
[s]
t7= t6 + (2*d-2*a); %tempo da terceira roda do vagão traseiro até o quebra
molas [s]
t8= t7 + (2*a); %tempo da quarta roda do vagão traseiro até o quebra molas
[s]
tf = 120; %tempo final [s]%

M = [ mv  0  0  0  0  0;
      0 mtt 0  0  0  0;
      0  0 mtd 0  0  0;
      0  0  0 Iv  0  0;
      0  0  0  0 Itt  0;
      0  0  0  0  0 Itd];
%Matriz M%

invm = inv(M);

B = [(2*bs) (-bs) (-bs) (0) (0) (0);

```

```

        (-bs) (2*bp-bs) (0) (bs*d) (0) (0);
        (-bs) (0) (2*bp-bs) (-bs*d) (0) (0);
        (0) (bs*d) (-bs*d) ( 2*bs*d^2) (0) (0);
        (0) (0) (0) (0) (2*bp*(a^2)) (0);
        (0) (0) (0) (0) (0) (2*bp*a^2);];
%Matriz B%

K = [(2*ks) (-ks) (-ks) (0) (0) (0);
      (-ks) (2*kp-ks) (0) (ks*d) (0) (0);
      (-ks) (0) (2*kp-ks) (-ks*d) (0) (0);
      (0) (ks*d) (-ks*d) (2*ks*d^2) (0) (0);
      (0) (0) (0) (0) (2*kp*a^2) (0);
      (0) (0) (0) (0) (0) (2*kp*a^2)];
%Matriz K%

Estados = [zeros(6) eye(6);
            -inv(M)*K -inv(M)*B;];

E2 = [Estados zeros(12,12);
       zeros(12,12) Estados;];

tspan=[0 tf];
y0=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
%estado inicial do vagão dianteiro (y) e do vagão traseiro (x) [z1 z2 z3
teta1 teta2 teta3]%
[t,y]=ode45('testevagaoduplo_v2',tspan,y0);
n=length(t);
z1=y(1:n,1);
z2=y(1:n,2);
z3=y(1:n,3);
teta1=y(1:n,4);
teta2=y(1:n,5);
teta3=y(1:n,6);
h1=y(1:n,13);
h2=y(1:n,14);
h3=y(1:n,15);
teta1t=y(1:n,16);
teta2t=y(1:n,17);
teta3t=y(1:n,18);

x1=z1-(d+xe)*teta1;
x2=(h1+(d+xe)*teta1t);
x3=x1-x2;
figure (1)
plot (t, z1)
title ('Deslocamento do centro de massa do primeiro vagão')
grid on
xlabel ('Tempo (s)')
ylabel ('Deslocamento (m)')

figure (2)
plot (t, z2)
title ('Deslocamento do truck traseiro do primeiro vagão')
grid on
xlabel ('Tempo (s)')
ylabel ('Deslocamento (m)')

figure (3)
plot (t, z3)

```

```
title ('Deslocamento do truck dianteiro do primeiro vagão')
grid on
xlabel ('Tempo (s)')
ylabel ('Deslocamento (m)')

figure (4)
plot (t, h1)
title ('Deslocamento do centro de massa do vagão traseiro')
grid on
xlabel ('Tempo (s)')
ylabel ('Deslocamento (m)')

figure (5)
plot (t, h2)
title ('Deslocamento do truck traseiro do vagão traseiro')
grid on
xlabel ('Tempo (s)')
ylabel ('Deslocamento (m)')

figure (6)
plot (t, h3)
title ('Deslocamento do truck dianteiro do vagão traseiro')
grid on
xlabel ('Tempo (s)')
ylabel ('Deslocamento (m)')

figure (7)
plot (t, teta1)
title ('Teta 01 vagão dianteiro')
grid on
xlabel ('Tempo (s)')
ylabel ('Angulo (rad)')

figure (8)
plot (t, teta1t)
title ('Teta 01 vagão traseiro')
grid on
xlabel ('Tempo (s)')
ylabel ('Angulo (rad)')

figure (9)
plot (t, x3*1000)
title ('Deformação da mola fictícia no ponto de acoplamento')
grid on
xlabel ('Tempo (s)')
ylabel ('Deformação (mm)')

figure (10)
plot (t, x3*Kacp/1000)
title ('Força de reação no ponto de acoplamento')
grid on
xlabel ('Tempo (s)')
ylabel ('Força (kN)')
```

toc

```

function yp=testevagaoduplo_v2(t,y)
global Ft invm x1 x2 Kacp v yc W t1 t2 t3 t4 t5 t6 t7 t8
global xqm mv mtt mtd g Fc1 Fc2 d xe
global yp1 ypp1 yp2 ypp2 yp3 ypp3 yp4 ypp4 yp5 ypp5 yp6 ypp6 yp7 ypp7 yp8
ypp8
global Ftd Ftt kp bp a E2 xac
global F1

if(t<t1)
    yp1=0;
    ypp1=0;
elseif (t>(t1+(xqm/v)))
    yp1=0;
    ypp1=0;
else
    yp1=(yc/2)*(1-cos(W*(t-t1)));
    ypp1=(yc/2)*(W*sin(W*(t-t1)));
end

if(t<t2)
    yp2=0;
    ypp2=0;
elseif (t>(t2+(xqm/v)))
    yp2=0;
    ypp2=0;
else
    yp2=(yc/2)*(1-cos(W*(t-t2)));
    ypp2=(yc/2)*(W*sin(W*(t-t2)));
end

if(t<t3)
    yp3=0;
    ypp3=0;
elseif (t>(t3+(xqm/v)))
    yp3=0;
    ypp3=0;
else
    yp3=(yc/2)*(1-cos(W*(t-t3)));
    ypp3=(yc/2)*(W*sin(W*(t-t3)));
end

if(t<t4)
    yp4=0;
    ypp4=0;
elseif (t>(t4+(xqm/v)))
    yp4=0;
    ypp4=0;
else
    yp4=(yc/2)*(1-cos(W*(t-t4)));
    ypp4=(yc/2)*(W*sin(W*(t-t4)));
end

if(t<t5)
    yp5=0;
    ypp5=0;
elseif (t>(t5+(xqm/v)))
    yp5=0;
    ypp5=0;

```

```

else
    yp5=(yc/2)*(1-cos(W*(t-t5)));
    ypp5=(yc/2)*(W*sin(W*(t-t5)));
end

if(t<t6)
    yp6=0;
    ypp6=0;
elseif (t>(t6+(xqm/v)))
    yp6=0;
    ypp6=0;
else
    yp6=(yc/2)*(1-cos(W*(t-t6)));
    ypp6=(yc/2)*(W*sin(W*(t-t6)));
end

if(t<t7)
    yp7=0;
    ypp7=0;
elseif (t>(t7+(xqm/v)))
    yp7=0;
    ypp7=0;
else
    yp7=(yc/2)*(1-cos(W*(t-t7)));
    ypp7=(yc/2)*(W*sin(W*(t-t7)));
end

end

if(t<t8)
    yp8=0;
    ypp8=0;
elseif (t>(t8+(xqm/v)))
    yp8=0;
    ypp8=0;
else
    yp8=(yc/2)*(1-cos(W*(t-t8)));
    ypp8=(yc/2)*(W*sin(W*(t-t8)));
end

end

xac=((y(1)-(d+xe)*y(4)))-((y(13)+(d+xe)*y(16)));
% xac2=((y(13)+(d+xe)*y(16)));
F1=Kacp*xac;
% F2=Kacp*xac2;
% F1=0;
% F2=0;

Ftd=[-mv*g-F1;
    -mtd*g+kp*yp3+kp*yp4+bp*ypp3+bp*ypp4;
    -mtt*g+kp*yp1+kp*yp2+bp*ypp1+bp*ypp2;
    F1*(d+xe);
    -kp*yp3*a-bp*ypp3*a+kp*yp4*a+bp*ypp4*a;
    -kp*yp1*a-bp*ypp1*a+kp*yp2*a+bp*ypp2*a;];

Ftt=[-mv*g+F1;
    -mtd*g+kp*yp7+kp*yp8+bp*ypp7+bp*ypp8;
    -mtt*g+kp*yp5+kp*yp6+bp*ypp5+bp*ypp6;

```

```
F1*(d+xe);  
-kp*yp7*a-bp*ypp7*a+kp*yp8*a+bp*ypp8*a;  
-kp*yp5*a-bp*ypp5*a+kp*yp6*a+bp*ypp6*a;];
```

```
Fc1 = invm*Ftd;  
Fc2 = invm*Ftt;
```

```
x1=[0;0;0;0;0;0;0;Fc1;];  
x2=[0;0;0;0;0;0;0;Fc2;];  
Ft=[x1;x2;];
```

```
yp= E2*y + Ft;
```

Apêndice III: Rotina para a solução do modelo de vagão único passando pela ponte

```

clear
close all
global m k ro E A L I mv mtt mtd g kp ks bp bs
global ap b v xqm a d D W Iv Itt Itd invm Estados tf Kacp E2 invM
global xr1 xr2 xr3 xr4
global tdd1 tdd2 tdd3 tdd4 tdd5 tdd6 tdd7
global tdt1 tdt2 tdt3 tdt4 tdt5 tdt6 tdt7
global ttd1 ttd2 ttd3 ttd4 ttd5 ttd6 ttd7
global ttt1 ttt2 ttt3 ttt4 ttt5 ttt6 ttt7
tic
mv=49120/2; %Massa do vagão [kg] %
mtt=11000/2; %massa do truck traseiro [kg]%
mtd=11000/2; %massa do truck dianteiro [kg]%
g=9.81; %aceleração da gravidade%
kp=1637275; %Rigidez das molas da suspensão primária[N/m]%
ks=875665; %Rigidez das molas da suspensão traseira [N/m]%
Kacp=5e7; %Rigidez fictícia do acoplamento [N/m]
bp=32745.5; %Constante de amortecimento da suspensão primária [Ns/m]%
bs=17513.1; %Constante de amortecimento da suspensão secundária [Ns/m]]%
Iv=2008950; %Momento de inércia do vagão [Kg.m²]%
Itt=20800/2; %Momento de inércia do truck traseiro [Kg.m²]%
Itd=20800/2; %Momento de inércia do truck dianteiro [Kg.m²]%
d=7.5; %distância do centro do vagão até as suspensões dianteira/traseira
[m]%
a=1.5; %metade da distância longitudinal entre as rodas [m]%
v=5; %velocidade da composição [m/s]
xqm=3; %comprimento do quebra-molas [m]%
D=50; %distância da primeira roda até a ponte [m]%
L=6+(6/9); %comprimento do vão da ponte, comprimento total de 40 m
W=(v*2*pi)/xqm; %Velocidade angular [rad/s];
%tempos referentes a entrada da roda dianteira do truck dianteiro na ponte
xr1=D;
tdd1=D/v;
tdd2=(D+L)/v;
tdd3=(2*L+D)/v;
tdd4=(3*L+D)/v;
tdd5=(4*L+D)/v;
tdd6=(5*L+D)/v;
tdd7=(6*L+D)/v;

%tempos referentes a entrada da roda traseira do truck dianteiro na ponte
xr2=xr1+2*a;
tdt1=(xr2)/v;
tdt2=(xr2+L)/v;
tdt3=(xr2+2*L)/v;
tdt4=(xr2+3*L)/v;
tdt5=(xr2+4*L)/v;
tdt6=(xr2+5*L)/v;
tdt7=(xr2+6*L)/v;

%tempos referentes a entrada da roda dianteira do truck traseiro na ponte
xr3=xr1+2*d;
ttd1=(xr3)/v;
ttd2=(xr3+L)/v;

```

```

ttd3=(xr3+2*L)/v;
ttd4=(xr3+3*L)/v;
ttd5=(xr3+4*L)/v;
ttd6=(xr3+5*L)/v;
ttd7=(xr3+6*L)/v;

%tempos referentes a entrada da roda dianteira do truck traseiro na ponte
xr4=xr1+2*d+2*a;
ttt1=(xr4)/v;
ttt2=(xr4+L)/v;
ttt3=(xr4+2*L)/v;
ttt4=(xr4+3*L)/v;
ttt5=(xr4+4*L)/v;
ttt6=(xr4+5*L)/v;
ttt7=(xr4+6*L)/v;
tf = 50; %tempo final [s]%
xr1
xr2
xr3
xr4

ro=7860;
A=0.4864;
E=200e9;
I=8e-3;

M = [ mv  0  0  0  0  0;
      0 mtt 0  0  0  0;
      0  0 mtd 0  0  0;
      0  0  0 Iv  0  0;
      0  0  0  0 Itt 0;
      0  0  0  0  0 Itd];
%Matriz M referente aos vagões%

invm = inv(M);

B = [(2*bs) (-bs) (-bs) (0) (0) (0);
      (-bs) (2*bp-bs) (0) (bs*d) (0) (0);
      (-bs) (0) (2*bp-bs) (-bs*d) (0) (0);
      (0) (bs*d) (-bs*d) ( 2*bs*d^2) (0) (0);
      (0) (0) (0) (0) (2*bp*(a^2)) (0);
      (0) (0) (0) (0) (0) (2*bp*a^2)];
%Matriz B referente aos vagões%

K = [(2*ks) (-ks) (-ks) (0) (0) (0);
      (-ks) (2*kp-ks) (0) (ks*d) (0) (0);
      (-ks) (0) (2*kp-ks) (-ks*d) (0) (0);
      (0) (ks*d) (-ks*d) (2*ks*d^2) (0) (0);
      (0) (0) (0) (0) (2*kp*a^2) (0);
      (0) (0) (0) (0) (0) (2*kp*a^2)];
%Matriz K referente aos vagões%

Estados = [zeros(6) eye(6);
            -inv(M)*K -inv(M)*B];

```



```

m=(ro*A*L/420)*[4*L*L 13*L -3*L*L 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
13*L 312 0 54 -13*L 0 0 0 0 0 0 0;
-3*L*L 0 8*L*L 13*L -3*L*L 0 0 0 0 0 0 0;
0 54 13*L 312 0 54 -13*L 0 0 0 0 0;
0 -13*L -3*L*L 0 8*L*L 13*L -3*L*L 0 0 0 0 0;
0 0 0 54 13*L 312 0 54 -13*L 0 0 0;
0 0 0 -13*L -3*L*L 0 8*L*L 13*L -3*L*L 0 0 0;
0 0 0 0 0 54 13*L 312 0 54 -13*L 0;
0 0 0 0 0 -13*L -3*L*L 0 8*L*L 13*L -3*L*L 0;
0 0 0 0 0 0 0 54 13*L 312 0 -13*L;
0 0 0 0 0 0 0 -13*L -3*L*L 0 8*L*L -3*L*L;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 -13*L -3*L*L 4*L*L];

%Matriz M referente a ponte%

k=(E*I/(L*L*L))*[4*L*L -6*L 2*L*L 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
-6*L 24 0 -12 6*L 0 0 0 0 0 0 0;
2*L*L 0 8*L*L -6*L 2*L*L 0 0 0 0 0 0 0;
0 -12 -6*L 24 0 -12 6*L 0 0 0 0 0;
0 6*L 2*L*L 0 8*L*L -6*L 2*L*L 0 0 0 0 0;
0 0 0 -12 -6*L 24 0 -12 6*L 0 0 0;
0 0 0 6*L 2*L*L 0 8*L*L -6*L 2*L*L 0 0 0;
0 0 0 0 0 -12 -6*L 24 0 -12 6*L 0;
0 0 0 0 0 6*L 2*L*L 0 8*L*L -6*L 2*L*L 0;
0 0 0 0 0 0 0 -12 -6*L 24 0 6*L;
0 0 0 0 0 0 0 6*L 2*L*L 0 8*L*L 2*L*L;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 6*L 2*L*L 4*L*L];

%Matriz K referente a ponte%

invM= inv(m);
invM=inv(M);

b=0.1*k+0.1*m;

ap=[zeros(12) eye(12);
-invm*k -invm*b];

Estados = [zeros(6) eye(6);
-inv(M)*K -inv(M)*B];

E2 = [Estados zeros(12,24);
zeros(24,12) ap];

tspan=[0 tf];
y0=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
[t,y]=ode23s('equacao_vagaounicoponte',tspan,y0);
n=length(t);
z1=y(1:n,1);
z2=y(1:n,2);
z3=y(1:n,3);
teta1=y(1:n,4);
teta2=y(1:n,5);
teta3=y(1:n,6);
v1=y(1:n,7);
v2=y(1:n,8);
v3=y(1:n,9);

```

```

teta1p=y(1:n,10);
teta2p=y(1:n,11);
teta3p=y(1:n,12);
u2=y(1:n,13);
u3=y(1:n,14);
u4=y(1:n,15);
u5=y(1:n,16);
u6=y(1:n,17);
u7=y(1:n,18);
u8=y(1:n,19);
u9=y(1:n,20);
u10=y(1:n,21);
u11=y(1:n,22);
u12=y(1:n,23);
u14=y(1:n,24);
up2=y(1:n,25);
up3=y(1:n,26);
up4=y(1:n,27);
up5=y(1:n,28);
up6=y(1:n,29);
up7=y(1:n,30);
up8=y(1:n,31);
up9=y(1:n,32);
up10=y(1:n,33);
up11=y(1:n,34);
up12=y(1:n,35);
up14=y(1:n,36);

figure (1)
plot (t, z1)
title ('Deslocamento do centro de massa do vagão')
grid on
xlabel ('Tempo (s)')
ylabel ('Deslocamento (m)')

figure (2)
plot(t,u7*1000)
title('Deslocamento do nó central da ponte')
grid on
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('deslocamento (mm)')

toc

function yp=equacao_vagaounicoponte(t,y)

global d dd xe g mtt mtd mv v L a E2 F2 F3 F4 F5 F6 F7 F8 F9 F10 F11 F12
F14
global u u1 u2 u3 u4 u5 u6 u7 Fr kp bp invm invM
global N1 N2 N3 N4
global tdd1 tdd2 tdd3 tdd4 tdd5 tdd6 tdd7
global tdt1 tdt2 tdt3 tdt4 tdt5 tdt6 tdt7
global ttd1 ttd2 ttd3 ttd4 ttd5 ttd6 ttd7
global ttt1 ttt2 ttt3 ttt4 ttt5 ttt6 ttt7

t

```

```

F2=0;
F3=0;
F4=0;
F5=0;
F6=0;
F7=0;
F8=0;
F9=0;
F10=0;
F11=0;
F12=0;
F14=0;
N1=0;
N2=0;
N3=0;
N4=0;
N5=0;
N6=0;
N7=0;
N8=0;
u=0;
u1=0;
u2=0;
u3=0;
u4=0;
u5=0;
u6=0;
u7=0;
Fr=0;

yp1=0;
yp2=0;
yp3=0;
yp4=0;
ypp1=0;
ypp2=0;
ypp3=0;
ypp4=0;

if (t>tdd1) && (t<tdd2)
    dd=(t-tdd1)*v;
    %calculo de u
    N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N2=dd - 2 * L * (dd/L) * (dd/L)+ L* (dd/L) * (dd/L) * (dd/L);
    N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    u=N2*y(13)+N3*y(14)+N4*y(15);
    yp1=u;
    u1=N2*y(25)+N3*y(26)+N4*y(27);
    ypp1=u1;
    Fr=kp*((y(3))+a*(y(6))-yp1)+bp*((y(9))+a*(y(12))-ypp1);
    F2= F2 + ((dd/L)*Fr);
else
end

if (t>tdd2) && (t<tdd3)
    dd=(t-tdd2)*v;
    %calculo de u
    N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N2=dd - 2 * L * (dd/L) * (dd/L)+ L* (dd/L) * (dd/L) * (dd/L);
    N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);

```

```

N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
u=N1*y(14)+N2*y(15)+N3*y(16)+N4*y(17);
yp1=u;
u1=N1*y(26)+N2*y(27)+N3*y(28)+N4*y(29);
ypp1=u1;
Fr=kp*((y(3))+a*(y(6))-yp1)+bp*((y(9))+a*(y(12))-ypp1);
F2=F2+(((L-dd)/L)*Fr);
F4=F4+((dd/L)*Fr);
else
end

if (t>tdd3) && (t<tdd4)
dd=(t-tdd3)*v;
%calculo de u
N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
N2=dd - 2 * L * (dd/L) * (dd/L)+ L* (dd/L) * (dd/L) * (dd/L);
N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
u=N1*y(16)+N2*y(17)+N3*y(18)+N4*y(19);
yp1=u;
u1=N1*y(28)+N2*y(29)+N3*y(30)+N4*y(31);
ypp1=u1;
Fr=kp*((y(3))+a*(y(6))-yp1)+bp*((y(9))+a*(y(12))-ypp1);
F4=F4+(((L-dd)/L)*Fr);
F6=F6+((dd/L)*Fr);
else
end

if (t>tdd4) && (t<tdd5)
dd=(t-tdd4)*v;
%calculo de u
N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
N2=dd - 2 * L * (dd/L) * (dd/L)+ L* (dd/L) * (dd/L) * (dd/L);
N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
u=N1*y(18)+N2*y(19)+N3*y(20)+N4*y(21);
yp1=u;
u1=N1*y(30)+N2*y(31)+N3*y(32)+N4*y(33);
ypp1=u1;
Fr=kp*((y(3))+a*(y(6))-yp1)+bp*((y(9))+a*(y(12))-ypp1);
F6=F6+(((L-dd)/L)*Fr);
F8=F8+((dd/L)*Fr);
else
end

if (t>tdd5) && (t<tdd6)
dd=(t-tdd5)*v;
%calculo de u
N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
N2=dd - 2 * L * (dd/L) * (dd/L)+ L* (dd/L) * (dd/L) * (dd/L);
N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
u=N1*y(20)+N2*y(21)+N3*y(22)+N4*y(23);
yp1=u;
u1=N1*y(32)+N2*y(33)+N3*y(34)+N4*y(35);
ypp1=u1;
Fr=kp*((y(3))+a*(y(6))-yp1)+bp*((y(9))+a*(y(12))-ypp1);
F8=F8+(((L-dd)/L)*Fr);
F10=F10+((dd/L)*Fr);
else
end

```

```

if (t>tdd6) && (t<tdd7)
    dd=(t-tdd6)*v;
    %calculo de u
    N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N2=dd - 2 * L * (dd/L) * (dd/L)+ L* (dd/L) * (dd/L) * (dd/L);
    N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    u=N1*y(22)+N2*y(23)+N4*y(24);
    yp1=u;
    u1=N1*y(34)+N2*y(35)+N4*y(36);
    ypp1=u1;
    Fr=kp*((y(3))+a*(y(6))-yp1)+bp*((y(9))+a*(y(12))-ypp1);
    F10=F10+((L-dd)/L)*Fr;
else
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
if (t>tdt1) && (t<tdt2)
    dd=(t-tdt1)*v;
    %calculo de u
    N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N2=dd - 2 * L * (dd/L) * (dd/L)+ L* (dd/L) * (dd/L) * (dd/L);
    N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    u2=N2*y(13)+N3*y(14)+N4*y(15);
    yp2=u2;
    u3=N2*y(25)+N3*y(26)+N4*y(27);
    ypp2=u3;
    Fr=kp*((y(3))-a*(y(6))-yp2)+bp*((y(9))-a*(y(12))-ypp2);
    F2= F2 + ((dd/L)*Fr);
else
end

if (t>tdt2) && (t<tdt3)
    dd=(t-tdt2)*v;
    %calculo de u
    N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N2=dd - 2 * L * (dd/L) * (dd/L)+ L* (dd/L) * (dd/L) * (dd/L);
    N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    u2=N1*y(14)+N2*y(15)+N3*y(16)+N4*y(17);
    yp2=u2;
    u3=N1*y(26)+N2*y(27)+N3*y(28)+N4*y(29);
    ypp2=u3;
    Fr=kp*((y(3))-a*(y(6))-yp2)+bp*((y(9))-a*(y(12))-ypp2);
    F2=F2+(((L-dd)/L)*Fr);
    F4=F4+((dd/L)*Fr);
else
end

if (t>tdt3) && (t<tdt4)
    dd=(t-tdt3)*v;
    %calculo de u
    N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N2=dd - 2 * L * (dd/L) * (dd/L)+ L* (dd/L) * (dd/L) * (dd/L);
    N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    u2=N1*y(16)+N2*y(17)+N3*y(18)+N4*y(19);
    yp2=u2;
    u3=N1*y(28)+N2*y(29)+N3*y(30)+N4*y(31);
    ypp2=u3;

```

```

Fr=kp* ((y(3))-a*(y(6))-yp2)+bp* ((y(9))-a*(y(12))-ypp2);
F4=F4+ ((L-dd)/L)*Fr;
F6=F6+ ((dd/L)*Fr);
else
end

if (t>tdt4) && (t<tdt5)
dd=(t-tdt4)*v;
%calculo de u
N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
N2=dd - 2 * L * (dd/L) * (dd/L)+ L* (dd/L) * (dd/L) * (dd/L);
N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
u2=N1*y(18)+N2*y(19)+N3*y(20)+N4*y(21);
yp2=u2;
u3=N1*y(30)+N2*y(31)+N3*y(32)+N4*y(33);
ypp2=u3;
Fr=kp* ((y(3))-a*(y(6))-yp2)+bp* ((y(9))-a*(y(12))-ypp2);
F6=F6+ ((L-dd)/L)*Fr;
F8=F8+ ((dd/L)*Fr);
else
end

if (t>tdt5) && (t<tdt6)
dd=(t-tdt5)*v;
%calculo de u
N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
N2=dd - 2 * L * (dd/L) * (dd/L)+ L* (dd/L) * (dd/L) * (dd/L);
N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
u2=N1*y(20)+N2*y(21)+N3*y(22)+N4*y(23);
yp2=u2;
u3=N1*y(32)+N2*y(33)+N3*y(34)+N4*y(35);
ypp2=u3;
Fr=kp* ((y(3))-a*(y(6))-yp2)+bp* ((y(9))-a*(y(12))-ypp2);
F8=F8+ ((L-dd)/L)*Fr;
F10=F10+ ((dd/L)*Fr);
else
end

if (t>tdt6) && (t<tdt7)
dd=(t-tdt6)*v;
%calculo de u
N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
N2=dd - 2 * L * (dd/L) * (dd/L)+ L* (dd/L) * (dd/L) * (dd/L);
N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
u2=N1*y(22)+N2*y(23)+N4*y(24);
yp2=u2;
u3=N1*y(34)+N2*y(35)+N4*y(36);
ypp2=u3;
Fr=kp* ((y(3))-a*(y(6))-yp2)+bp* ((y(9))-a*(y(12))-ypp2);
F10=F10+ ((L-dd)/L)*Fr;
else
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

if (t>ttd1) && (t<ttd2)
dd=(t-ttd1)*v;
%calculo de u
N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);

```

```

N2=dd - 2 * L * (dd/L) * (dd/L) + L* (dd/L) * (dd/L) * (dd/L);
N3=3*(dd/L) * (dd/L) -2*(dd/L) * (dd/L) * (dd/L);
N4=-L*(dd/L) * (dd/L) +L*(dd/L) * (dd/L) * (dd/L);
u4=N2*y(13)+N3*y(14)+N4*y(15);
yp3=u4;
u5=N2*y(25)+N3*y(26)+N4*y(27);
ypp3=u5;
Fr=kp* ((y(2))+a*(y(5))-u4)+bp* ((y(8))+a*(y(11))-u5);
F2= F2 + ((dd/L)*Fr);
else
end

if (t>ttd2) && (t<ttd3)
dd=(t-ttd2)*v;
%calculo de u
N1=1-3*(dd/L) * (dd/L)+2*(dd/L) * (dd/L) * (dd/L);
N2=dd - 2 * L * (dd/L) * (dd/L) + L* (dd/L) * (dd/L) * (dd/L);
N3=3*(dd/L) * (dd/L) -2*(dd/L) * (dd/L) * (dd/L);
N4=-L*(dd/L) * (dd/L) +L*(dd/L) * (dd/L) * (dd/L);
u4=N1*y(14)+N2*y(15)+N3*y(16)+N4*y(17);
yp3=u4;
u5=N1*y(26)+N2*y(27)+N3*y(28)+N4*y(29);
ypp3=u5;
Fr=kp* ((y(2))+a*(y(5))-u4)+bp* ((y(8))+a*(y(11))-u5);
F2=F2+((L-dd)/L)*Fr);
F4=F4+((dd/L)*Fr);
else
end

if (t>ttd3) && (t<ttd4)
dd=(t-ttd3)*v;
%calculo de u
N1=1-3*(dd/L) * (dd/L)+2*(dd/L) * (dd/L) * (dd/L);
N2=dd - 2 * L * (dd/L) * (dd/L) + L* (dd/L) * (dd/L) * (dd/L);
N3=3*(dd/L) * (dd/L) -2*(dd/L) * (dd/L) * (dd/L);
N4=-L*(dd/L) * (dd/L) +L*(dd/L) * (dd/L) * (dd/L);
u4=N1*y(16)+N2*y(17)+N3*y(18)+N4*y(19);
yp3=u4;
u5=N1*y(28)+N2*y(29)+N3*y(30)+N4*y(31);
ypp1=u5;
Fr=kp* ((y(2))+a*(y(5))-u4)+bp* ((y(8))+a*(y(11))-u5);
F4=F4+((L-dd)/L)*Fr);
F6=F6+((dd/L)*Fr);
else
end

if (t>ttd4) && (t<ttd5)
dd=(t-ttd4)*v;
%calculo de u
N1=1-3*(dd/L) * (dd/L)+2*(dd/L) * (dd/L) * (dd/L);
N2=dd - 2 * L * (dd/L) * (dd/L) + L* (dd/L) * (dd/L) * (dd/L);
N3=3*(dd/L) * (dd/L) -2*(dd/L) * (dd/L) * (dd/L);
N4=-L*(dd/L) * (dd/L) +L*(dd/L) * (dd/L) * (dd/L);
u4=N1*y(18)+N2*y(19)+N3*y(20)+N4*y(21);
yp3=u4;
u5=N1*y(30)+N2*y(31)+N3*y(32)+N4*y(33);
ypp3=u5;
Fr=kp* ((y(2))+a*(y(5))-u4)+bp* ((y(8))+a*(y(11))-u5);
F6=F6+((L-dd)/L)*Fr);
F8=F8+((dd/L)*Fr);
else
end

```

end

```

if (t>ttd5) && (t<ttd6)
    dd=(t-ttd5)*v;
    %calculo de u
    N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N2=dd - 2 * L * (dd/L) * (dd/L)+ L* (dd/L) * (dd/L) * (dd/L);
    N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    u4=N1*y(20)+N2*y(21)+N3*y(22)+N4*y(23);
    yp3=u4;
    u5=N1*y(32)+N2*y(33)+N3*y(34)+N4*y(35);
    ypp3=u5;
    Fr=kp*((y(2))+a*(y(5))-u4)+bp*((y(8))+a*(y(11))-u5);
    F8=F8+((L-dd)/L)*Fr;
    F10=F10+((dd/L)*Fr);

```

else

end

```

if (t>ttd6) && (t<ttd7)
    dd=(t-ttd6)*v;
    %calculo de u
    N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N2=dd - 2 * L * (dd/L) * (dd/L)+ L* (dd/L) * (dd/L) * (dd/L);
    N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    u4=N1*y(22)+N2*y(23)+N4*y(24);
    yp3=u4;
    u5=N1*y(34)+N2*y(35)+N4*y(36);
    ypp3=u5;
    Fr=kp*((y(2))+a*(y(5))-u4)+bp*((y(8))+a*(y(11))-u5);
    F10=F10+((L-dd)/L)*Fr;

```

else

end

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

if (t>ttt1) && (t<ttt2)
    dd=(t-ttt1)*v;
    %calculo de u
    N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N2=dd - 2 * L * (dd/L) * (dd/L)+ L* (dd/L) * (dd/L) * (dd/L);
    N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    u6=N2*y(13)+N3*y(14)+N4*y(15);
    yp4=u6;
    u7=N2*y(25)+N3*y(26)+N4*y(27);
    ypp4=u7;
    Fr=kp*((y(2))-a*(y(5))-u6)+bp*((y(8))-a*(y(11))-u7);
    F2= F2 + ((dd/L)*Fr);

```

else

end

```

if (t>ttt2) && (t<ttt3)
    dd=(t-ttt2)*v;
    %calculo de u
    N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N2=dd - 2 * L * (dd/L) * (dd/L)+ L* (dd/L) * (dd/L) * (dd/L);
    N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    u6=N1*y(14)+N2*y(15)+N3*y(16)+N4*y(17);
    yp4=u6;
    u7=N1*y(26)+N2*y(27)+N3*y(28)+N4*y(29);

```



```

ypp4=u7;
Fr=kp*((y(2))-a*(y(5))-u6)+bp*((y(8))-a*(y(11))-u7);
F2=F2+((L-dd)/L)*Fr;
F4=F4+((dd/L)*Fr);
else
end

if (t>ttt3) && (t<ttt4)
    dd=(t-ttt3)*v;
    %calculo de u
    N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N2=dd - 2 * L * (dd/L) * (dd/L)+ L*(dd/L) * (dd/L) * (dd/L);
    N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    u6=N1*y(16)+N2*y(17)+N3*y(18)+N4*y(19);
    yp4=u6;
    u7=N1*y(28)+N2*y(29)+N3*y(30)+N4*y(31);
    ypp4=u7;
    Fr=kp*((y(2))-a*(y(5))-u6)+bp*((y(8))-a*(y(11))-u7);
    F4=F4+((L-dd)/L)*Fr;
    F6=F6+((dd/L)*Fr);
else
end

if (t>ttt4) && (t<ttt5)
    dd=(t-ttt4)*v;
    %calculo de u
    N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N2=dd - 2 * L * (dd/L) * (dd/L)+ L*(dd/L) * (dd/L) * (dd/L);
    N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    u6=N1*y(18)+N2*y(19)+N3*y(20)+N4*y(21);
    yp4=u6;
    u7=N1*y(30)+N2*y(31)+N3*y(32)+N4*y(33);
    ypp4=u7;
    Fr=kp*((y(2))-a*(y(5))-u6)+bp*((y(8))-a*(y(11))-u7);
    F6=F6+((L-dd)/L)*Fr;
    F8=F8+((dd/L)*Fr);
else
end

if (t>ttt5) && (t<ttt6)
    dd=(t-ttt5)*v;
    %calculo de u
    N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N2=dd - 2 * L * (dd/L) * (dd/L)+ L*(dd/L) * (dd/L) * (dd/L);
    N3=3*(dd/L)*(dd/L)-2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    N4=-L*(dd/L)*(dd/L)+L*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);
    u6=N1*y(20)+N2*y(21)+N3*y(22)+N4*y(23);
    yp4=u6;
    u7=N1*y(32)+N2*y(33)+N3*y(34)+N4*y(35);
    ypp4=u7;
    Fr=kp*((y(2))-a*(y(5))-u6)+bp*((y(8))-a*(y(11))-u7);
    F8=F8+((L-dd)/L)*Fr;
    F10=F10+((dd/L)*Fr);
else
end

if (t>ttt6) && (t<ttt7)
    dd=(t-ttt6)*v;
    %calculo de u
    N1=1-3*(dd/L)*(dd/L)+2*(dd/L)*(dd/L)*(dd/L);

```

